

Wykład Nr 13

(wyk. 21 I 11 r.)

Twierdzenie o dualności [1, pp. 139–154]:**Zadanie:**

Obliczyć

$$\begin{array}{ll} \min & x^2 + y^2 \\ \text{przy ograniczeniach:} & x + y = 1. \end{array}$$

Rozwiązanie przez mnożniki *Lagrange’a*:

$$L(x, y, p) = x^2 + y^2 + p(1 - x - y).$$

Dla ustalonego p z warunku koniecznego na $\min_{x,y} L(x, y, p)$ otrzymujemy:

$$\frac{\partial L(x, y, p)}{\partial x} = 2x - p = 0, \quad \frac{\partial L(x, y, p)}{\partial y} = 2y - p = 0$$

stąd

$$x = y = \frac{p}{2}.$$

Biorąc pod uwagę ograniczenie:

$$x + y = 1$$

otrzymujemy

$$p = 1, \quad \text{dalej} \quad x = y = \frac{1}{2}.$$

Rozważmy zadanie LP w postaci standardowej, dalej nazywane *zagadnieniem podstawowym (prymalnym)* i niech x^* będzie jego optymalnym rozwiązaniem:

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{z ograniczeniami:} & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{array}$$

Wprowadzamy następujące zadanie stowarzyszone (*relaxed*), gdzie ograniczenie $Ax = b$ jest zastąpione funkcją kary (*penalty*) $p^T(b - Ax)$:

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x + p^T(b - Ax) \\ \text{z ograniczeniem} & x \geq 0. \end{array}$$

Określamy funkcję:

$$g(p) = \min_{x \geq 0} [c^T x + p^T(b - Ax)] \leq c^T x^* + p^T(b - Ax^*) = c^T x^*.$$

ostatnia równość wynika z dopuszczalności x^* jako rozwiązania podstawowego problemu, tzn. $Ax^* = b$. Dla każdego p wartość funkcji $g(p)$ jest dolnym ograniczeniem optymalnego kosztu $c^T x^*$. W ten sposób doszliśmy do sformułowaniaZadanie dualne:

$$\begin{array}{ll} \max & g(p) \\ \text{ograniczenia:} & \text{bez!} \end{array}$$

Podstawowym wnioskiem z twierdzenia o dualności będzie, że optymalny koszt w zadaniu dualnym jest równy optymalnemu kosztowi $c^T x^*$ zadania podstawowego.

Z określenia funkcji $g(p)$ otrzymujemy:

$$g(p) = \min_{x \geq 0} [c^T x + p^T (b - Ax)] = p^T b + \min_{x \geq 0} (c^T - p^T A)x.$$

Zauważmy:

$$\min_{x \geq 0} (c^T - p^T A)x = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } c^T - p^T A \geq 0, \\ -\infty, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Przy obliczaniu $\max g(p)$ wystarczy rozważać te wartości p dla których $g(p)$ jest skończone. W ten sposób doszliśmy do sformułowania zadania dualnego:

$$\begin{aligned} & \max \quad p^T b \\ & \text{z ograniczeniami: } p^T A \leq c^T \end{aligned}$$

Twierdzenie 1. (słaba dualność) *Jeżeli x jest dopuszczalnym rozwiązaniem zadania podstawowego i p jest dopuszczalnym rozwiązaniem zadania dualnego, to*

$$p^T b \leq c^T x$$

Twierdzenie 2. (strong duality)

Jeśli zadanie LP ma optymalne rozwiązanie, to zagadnienie dualne też je ma i odpowiednie optymalne koszty są równe.

Literatura

- [1] Bertsimas, D. & Tsitsiklis, J.N., *Introduction to Linear Optimization*, Athena Scientific, 1997.
- [2] Kowalik, Ł., *Wstęp do programowania liniowego*, UW, Algorytmika 2010,
<http://www.mimuw.edu.pl/~kowalik/teach/algorytmika/lp.pdf>
- [3] Stojnowski, A., *Optymalizacja I*, Uniwersytet Warszawski 2010,
<http://mst.mimuw.edu.pl/lecture.php?lecture=op1>

Wrocław, dnia 21/01/2011