

Lista Nr 03, ćwiczenia

(wyk. 29 X 10 r.)

Na liście są zadania dotyczące dokładnych metod rozwiązywania układów liniowych oraz dobrego uwarunkowania macierzy. Zadania są wzięte z [1] oraz [2].

1. Na stronie WWW <factorial n!>: <http://factorielle.free.fr/> można znaleźć wyliczoną wartość np. 1 000 000!. Przedyskutować, w jaki sposób można sprawdzić poprawność wykonanych obliczeń.
2. Udowodnić, że:
 - (a) Jeżeli $\mathbf{L}$ –nieosobliwa jest *dolnie trójkątna*, to $\mathbf{L}^{-1}$ też jest *dolnie trójkątna*.
 - (b) Jeżeli $\mathbf{L}$ jest *dolnie trójkątna* i $l_{ii} = 1$, dla $i = 1, \dots, n$, to $\mathbf{L}^{-1}$ istnieje i na jej przekątnej są 1.
 - (c) Iloczyn dwóch macierzy *dolnie trójkątnych* jest macierzą *dolnie trójkątną*.
3. Udowodnić, że jeżeli $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ jest *nieosobliwa* oraz $l_{ii} = 1$, $i = 1, \dots, n$ w $\mathbf{L}$, to $\mathbf{L}$ i $\mathbf{U}$ są wyznaczone jednoznacznie.
4. Wykazać, że macierz *górnio/dolnie trójkątna* jest nieosobliwa, wtedy i tylko wtedy, gdy elementy leżące na głównej przekątnej są różne od zera.
5. Wykazać, że dla macierzy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

nie istnieją macierze *trójkątne* $\mathbf{L}, \mathbf{U}$ o własności: $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$.

6. Z równości $\mathbf{UU}^{-1} = \mathbf{I}$ wyprowadzić algorytm na wyznaczenie $\mathbf{U}^{-1}$, gdzie $\mathbf{U}$ jest *górnio trójkątna*.
7. Pokazać, że macierz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

ma $\mathbf{LU}$ – rozkład.

8. Opracować algorytm znajdowania $\mathbf{L}^{-1}$, gdzie $\mathbf{L}$ – macierz *dolnie trójkątna*.
9. Pokazać, że funkcje $\|x\|_\infty$, $\|x\|_2$, $\|x\|_1$ są normami w $\mathbb{R}^n$.
10. Wykazać nierówności

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$$

dla $x \in \mathbb{R}^n$.

11. Wykazać, że jeżeli $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ są ograniczone, to wtedy zachodzi

$$\sup[f(x) + g(x)] \leq \sup f(x) + \sup g(x).$$

12. Jeżeli w $\mathbb{R}^n$ jest określona norma wektorowa $\|x\| = \sum_{i=1}^n |x_i|$, to odpowiadająca norma macierzowa jest określona wzorem

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|.$$

13. Dla normy macierzowej $\|\cdot\|_\infty$ obliczyć $\kappa(A)$ dla macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}.$$

14. Niech $n = 3$ i dla macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \\ 2 & 6 & -2 \end{bmatrix}$$

obliczyć $\sup_{\|x\|_\infty \leq 1} \|Ax\|_\infty$.

15. Obliczyć $\kappa(A)$ dla norm $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ i macierzy

$$(a) \begin{bmatrix} a+1 & a \\ a & a-1 \end{bmatrix}, \quad (b) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad (c) \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

16. Dla $p \geq 1$ i $x \in \mathbb{R}^n$ określamy $\|x\|_p \stackrel{\text{def}}{=} (\sum_{i=1}^n |x_i|)^{\frac{1}{p}}$. Wykazać, że $\|\cdot\|_\infty$ jest normą dla której zachodzi $\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

Literatura

- [1] D. Kincaid and W. Cheney, Numerical analysis, Brooks, USA, 1996,
Książka jest w bibliotece Instytutu Informatyki Uniwersytetu Wrocławskiego.
- [2] G.W Stewart, Afternotes on numerical analysis, SIAM, 1996,
Polecona przez A. Szustalewicza.

Wrocław, dnia 16/11/2010