

Lista Nr 05, ćwiczenia

(wyk. 19,26 XI 10 r.)

1. ¹ Wykazać, że jeżeli $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x \neq y$, to wtedy macierz ortogonalna spełniająca

$$Ux = y$$

jest dana wzorem

$$U = I - vu^T, \quad \text{gdzie} \quad v = x - y \quad \text{i} \quad u = \frac{2v}{\|v\|_2^2}.$$

2. Niech $\{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subset \mathbb{R}^n$ będzie unormowaną ($\|u_i\|_2 = 1$, $i = 1, \dots, n$) ortogonalną ($\langle u_i, u_j \rangle = 0$, $i \neq j$) bazą w przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Wykazać, że wtedy zachodzi:

(a) $\|x\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \langle x, u_i \rangle^2$,

(b) $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \langle x, u_i \rangle \langle y, u_i \rangle$.

3. Niech $\{u_1, u_2, \dots, u_m\} \subset \mathbb{V} \subset \mathbb{R}^n$ będzie ortogonalną unormowaną bazą w podprzestrzeni $\mathbb{V}$. Niech odwzorowanie $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{V}$ będzie określone wzorem $Px = \sum_{i=1}^m \langle x, u_i \rangle u_i$. Wykazać, że wtedy

(a) P – jest liniowe,

(b) $P^2 = P$,

(c) $Px = x$ dla $x \in \mathbb{V}$,

(d) $\|Px\|_2 \leq \|x\|_2$ dla $x \in \mathbb{R}^n$.

4. Jakie może przyjmować wartości wyznacznik macierzy ortogonalnej?
5. Jaki jest konieczny i wystarczający warunek na to, aby zbiór $\{u_1, \dots, u_m\}$ wektorów ortogonalnych był liniowo niezależny?
6. Dla ustalonych wektorów $u, x \in \mathbb{R}^n$ wyznaczyć $t \in \mathbb{R}$ dla którego wyrażenie $\|u - tx\|_2$ przyjmuje najmniejszą wartość.
7. Niech $\{x_1, \dots, x_n\}$, $\{y_1, \dots, y_n\} \subset \mathbb{R}^n$ będą ortogonalnymi unormowanymi bazami. Wtedy macierz

$$A = [\langle x_i, y_j \rangle]$$

jest ortogonalna.

8. Niech $A = I - uv^T$, $u, v \in \mathbb{R}^n$. Jakie warunki konieczne i wystarczające muszą spełniać wektory u, v aby $A^2 = I$.
9. Niech $v^T v = 2$, $v \in \mathbb{R}^n$ i

$$A = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I - vv^T \end{bmatrix}.$$

Wykazać, że wtedy

$$A^2 = I.$$

10. Czy jeżeli macierze A, B są ortogonalne, to macierz

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

też?

¹ [1, ss. 303–307]

11. Przy pomocy algorytmu Householder'a wyznaczyć rozkład QR macierzy:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

12. Jeżeli Q jest macierzą ortogonalną, to wtedy

(a) $\|x\|_2 = \|Qx\|_2$,

(b) $\langle x, y \rangle = \langle Qx, Qy \rangle$.

Literatura

[1] D. Kincaid and W. Cheney, Numerical analysis, Brooks, USA, 1996,

Książka jest w bibliotece Instytutu Informatyki Uniwersytetu Wrocławskiego.

Wrocław, dnia 07/12/2010