

Lista Nr 06, ćwiczenia

(wyk. 3 XII 10 r.)

Lista dotyczy iteracyjnych metod rozwiązywania równań liniowych i zaczniemy od przypomnienia definicji:

Definicja 1. (promień spektralny) Dla macierzy $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ liczbę

$$\rho(A) = \max \{ |\lambda| : Ax = \lambda x, x \neq 0, \lambda \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{C}^n \}$$

nazywamy promieniem spektralnym macierzy A .

Definicja 2. (p – norma) Dla macierzy $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ i $p \in (1, \infty)$, określamy

$$\|A\|_p = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}.$$

Specjalne znaczenie ma norma $\|A\|_2$, gdyż wtedy (patrz: [3, Th. 1.2, ss. 24]) zachodzi

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)} = \sqrt{\rho(A A^T)},$$

a w szczególnym przypadku macierzy symetrycznej mamy:

$$\|A\|_2 = \rho(A), \quad \text{dla } A = A^T.$$

Zadania:

1. Dla $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ lub $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ (elementarna teoria jest w [2, roz. XIV, ss. 383 – 409]) wykazać:

- | | |
|--|---|
| (a) $\ A\ _2 = \rho(A)$, gdy $A = A^T$ | (b) $\ A\ _2 = \sqrt{\rho(A A^T)}$ |
| (c) $\frac{1}{\sqrt{n}} \ A\ _p \leq \ A\ _2 \leq \sqrt{n} \ A\ _p$, $p \in \{1, \infty\}$ | (d) $\rho(A) \leq \ A\ $ |
| (e) $\forall \varepsilon \exists \ \cdot\ _{A, \varepsilon} \ A\ _{A, \varepsilon} \leq \rho(A) + \varepsilon$ | (f) $\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{\ A^m\ } = \rho(A)$ |

UWAGA: To zadanie może się okazać trudne! Celem jest wykazanie jaką rolę odgrywa promień spektralny macierzy.

2. Dla ([1, ss. 376 – 377] – dalej też) macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

obliczyć $\rho(A)$.

3. Dla następujących macierzy obliczyć wartości własne i odpowiadające im wektory własne:

- | | | |
|---|---|--|
| (a) $\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ | (b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ | (c) $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ |
| (d) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ | (e) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ | (f) $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$ |

4. Pokazać, że dla macierzy

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

nie jest prawdą $\lim_{m \rightarrow \infty} A_1^m = 0$. Natomiast, dla

$$A_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 16 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

zachodzi $\lim_{m \rightarrow \infty} A_2^m = 0$.

5. Na wykładzie pokazano, że rozwiązanie układu $Ax = b$ jest równoważne, dla odpowiednio dobranej macierzy T i wektora c , na znalezieniu x spełniającego równanie $x = Tx + c$. Wykazać

(a) Jeżeli dla $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ zachodzi $\rho(T) < 1$, to $(I - T)^{-1}$ istnieje oraz

$$(I - T)^{-1} = I + T + T^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} T^k.$$

(b) Podstawowe twierdzenie dla metod iteracyjnych. Dla dowolnie wybranego $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ ciąg $x^{(k)}$ określony wzorem

$$x^{(k)} = Tx^{(k-1)} + c$$

jest zbieżny do jednoznacznie określonego $x \in \mathbb{R}^n$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\rho(T) < 1$.

(c) W warunkach punktu (5b) zachodzą następujące oszacowania:

$$\begin{aligned} \|x - x^{(k)}\| &\leq \|T\|^k \|x^{(0)} - x\|, \\ \|x - x^{(k)}\| &\leq \frac{\|T\|^k}{1 - \|T\|} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|. \end{aligned}$$

Literatura

- [1] R.L. Burden, J.D. Faires, and Reynolds A.C., Numerical analysis, Prindle, Weber & Schmidt, Boston, Massachusetts, 1981.
- [2] S. Lang, Algebra, PWN, Warszawa, 1973.
- [3] A. Quarteroni, R. Sacco, and F. Saleri, Numerical mathematics, Springer, 2000.

Wrocław, dnia 07/12/2010