

II Wykład: 22 X 10r**II-1.1. Działania arytmetyczne**

W komputerach IBM PowerPC (Fused Multiply Add) Podstawą [3, ss. 5]

II-1.2. Stabilność i niestabilność oraz uwarunkowanie

(Rys. ??)

Rozważmy modyfikację przykładu z [4, ss. 68–76]. Dla danego $A \geq \frac{1}{3}$ niech będzie dany ciąg

$$\begin{cases} x_0 &= 1, \\ x_1 &= \frac{1}{3} \\ x_{n+1} &= \frac{3A+1}{3}x_n - \frac{A}{3}x_{n-1}, \quad n \geq 1. \end{cases} \quad (\text{II-1.1})$$

Indukcyjnie sprawdzamy, że jeżeli założymy spełnienie $x_m = \left(\frac{1}{3}\right)^m$ dla $m = 0, 1, 2, \dots, n$ to:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \\ &= \frac{3A+1}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^n - \frac{A}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^n \left(\frac{3A+1}{3} - A\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}. \end{aligned}$$

Równości (II-1.1) określają równanie różnicowe (patrz [1, ss. 175–195] [4, ss. 29–35]) dla którego pierwiastki równania charakterystycznego

$$\lambda^2 - \frac{3A+1}{3}\lambda + \frac{A}{3} = 0 \quad (\text{II-1.2})$$

są następujące

$$\lambda_1 = A, \quad \lambda_2 = \frac{1}{3}.$$

Ogólna postać rozwiązań równania różnicowego (II-1.1) jest następująca

$$x_n = \alpha \lambda_1^n + \beta \lambda_2^n \quad (\text{II-1.3})$$

gdzie stałe α, β są wyznaczone z warunku

$$\begin{aligned} x_0 &= \alpha + \beta, \\ x_1 &= \alpha \lambda_1 + \beta \lambda_2. \end{aligned}$$

Dla naszego układu (II-1.1) mamy $\alpha = 1, \beta = 0$. W [2, ss. 107–115] ciąg x_n określony iteracyjnie równościami (II-1.1) jest opisany następująco:

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3A+1}{3}, & -\frac{A}{3} \\ 1, & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{bmatrix}.$$

I jak określimy macierz A następująco (macierz Frobeniusa [5, t. 2, ss. 15–21])

$$A = \begin{bmatrix} \frac{3A+1}{3}, & -\frac{A}{3} \\ 1, & 0 \end{bmatrix},$$

to

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{bmatrix} = A^n \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Równanie na wartości własne macierzy A

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

jest postaci (II-1.2). Teoretycznie wykazaliśmy, że $x_n = (\frac{1}{3})^n$ a tym samym

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$$

niezależnie od $A \in \mathbb{R}$. W **Tab.II-1** przy pomocy którego wykonano obliczenia obliczenia pierwszych 11 wyrazów ciągu x_n dla $A = 0.75$ i $A = 100$.

```

1 clear all;
2 clc;
3 n = 10;
4 x = zeros(n,2);
5 A = [0.75 100];
6 for i=1:2
7     x(1,i) = 1;
8     x(2,i) = 1/3;
9     w1 = (3*A(i)+1)/3;
10    w2 = A(i)/3;
11    for j=2:n
12        x(j+1,i) = w1*x(j,i)-w2*x(j-1,i);
13    end;
14 end;
15 format short e
16 x

```

Tablica II-1. Skrypt obliczający pierwszych $n = 11$ wyrazów ciągu x_i .

I otrzymano, **Tab.II-2** następujące wyniki

n	$A = 0.75$	$A = 100$
1	1.0000e + 000	1.0000e + 000
2	3.3333e - 001	3.3333e - 001
3	1.1111e - 001	1.1111e - 001
4	3.7037e - 002	3.7037e - 002
5	1.2346e - 002	1.2346e - 002
6	4.1152e - 003	4.1152e - 003
7	1.3717e - 003	1.3713e - 003
8	4.5725e - 004	4.1756e - 004
9	1.5242e - 004	-3.8162e - 003
10	5.0805e - 005	-3.9681e - 001
11	1.6935e - 005	-3.9686e + 001

Tablica II-2. Otrzymane wyniki obliczeń dla $A = 0.75$ i $A = 100$.

W **Tab.II–2** widać, że począwszy od wyrazu $n = 9$ dla $A = 100$ kolejne obliczone wartości x_n zaczynają się oddalać od zera. Związane to jest z rozwiązaniami równania (II–1.2). Gdy $\max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} < 1$ ciąg x_n jest zbieżny do zera (jest stabilny) – w przeciwnym są problemy.

II–1.3. Przenoszenie błędu

Literatura

- [1] A. Björck and G. Dahlquist, Numerical mathematics and scientific computation, SIAM, Philadelphia, 2003,
Wersję roboczą polecił A. Szustalewicz. Jest ona dostępna pod adresem <http://www.mai.liu.se/~akbjjo/NMbook.html>.
- [2] P. Deufhard and F. Bornemann, Scientific computing with ordinary differential equations, SV, Berlin, 2002.
- [3] W. Kahan, Lecture notes on the status of IEEE standard 754 for binary floating-point arithmetic, 21.IV.04r: dostępna pod adresem: <http://www.cs.berkeley.edu/~wkahan/>.
- [4] D. Kincaid and W. Cheney, Numerical analysis, Brooks, USA, 1996,
Książka jest w bibliotece Instytutu Informatyki Uniwersytetu Wrocławskiego.
- [5] J. Stoer, Wstęp do metod numerycznych, PWN, Warszawa, 1979,
Tłumaczyła E. Gurbiel.

Wrocław, dnia 15 listopada 2010

(-) Krzysztof Tabisz
tabisz@math.uni.wroc.pl