

VI Wykład: 3 XII 10 r.

Opracowano na podstawie: [2], [4], [7]

Wykład zaczniemy od definicji:

VI-1.1 Definicja (promień spektralny)

Dla macierzy $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ liczbę

$$\rho(A) = \max \{|\lambda| : Ax = \lambda x, x \neq 0, \lambda \in \mathbb{C}\}$$

nazywamy promieniem spektralnym macierzy A .

VI-1.2 Definicja (norma naturalna macierzy A)

Dla macierzy $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ i $p \in (1, \infty)$, określamy

$$\|A\|_p = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}.$$

Dla naturalnej normy macierzowej $\|A\|_2$ wyznaczonej przez normę $\|x\|_2$, $x \in \mathbb{R}^n$ zachodzi:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}.$$

Jeżeli macierz A jest symetryczna $A^T = A$, to

$$\|A\|_2 = \rho(A).$$

Ponadto promień spektralny macierzy A i jej dowolna norma naturalna spełniają

$$\rho(A) \leq \|A\|.$$

VI-1.3 Własności

Zachodzą też następujące równoważności:

- $\lim_{k \rightarrow \infty} (A^k)_{i,j} = 0, \quad i, j = 1, \dots, n;$
- $\lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\| = 0$ – dla pewnej naturalnej normy macierzowej;
- $\lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\| = 0$ – dla każdej naturalnej normy macierzowej;
- $\rho(A) < 1;$
- $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k x = 0$ – dla każdego $x \in \mathbb{R}^n$.

W metodach iteracyjnych podstawowe znaczenie ma

VI-1.4 Twierdzenie (Banacha o punkcie stałym)

Jeżeli dla odwzorowania $P : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}$ gdzie $\mathbf{B}$ jest przestrzenią Banacha, istnieje takie θ , $0 < \theta < 1$ że dla każdego $x, y \in \mathbf{B}$ zachodzi

$$\|P(y) - P(x)\| \leq \theta \|y - x\|, \quad (\text{VI-1.1})$$

to wtedy dla dowolnego $x^0 \in \mathbf{B}$ ciąg

$$x^{k+1} = P(x^k), \quad k=0,1,2,\dots$$

jest zbieżny do $x^* \in \mathbf{B}$ jedyne elementu przestrzeni $\mathbf{B}$ o własności

$$P(x^*) = x^*$$

punktu stałego odwzorowania P . Ponadto ciąg x^k , $k = 1, 2, \dots$ spełnia oszacowania:

$$\|x^k - x^*\| \leq \frac{\theta^k}{1 - \theta} \|x^1 - x^0\| \quad (VI - 1.2a)$$

$$\|x^k - x^*\| \leq \frac{\theta}{1 - \theta} \|x^k - x^{k-1}\|. \quad (VI - 1.2b)$$

Dowód:

W pierwszej kolejności wykażemy zbieżność ciągu x^k , $k = 0, 1, 2, \dots$. Niech $x^0 \in \mathbf{B}$. Wtedy dla $k = 1, 2, \dots$ zachodzi

$$\|x^{k+1} - x^k\| \leq \theta \|P(x^k) - P(x^{k-1})\|$$

skąd wynika, że

$$\|x^{k+1} - x^k\| \leq \theta^k \|x^1 - x^0\|.$$

Z nierówności trójkąta dla $k, l \in \mathbb{N}$, $l > k$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \|x^l - x^k\| &\leq \\ &\leq \|x^k - x^{k+1}\| + \|x^{k+1} - x^{k+2}\| + \dots + \|x^{l-1} - x^l\| \leq \\ &\leq (\theta^k + \theta^{k+1} + \dots + \theta^{l-1}) \|x^1 - x^0\| \leq \\ &\leq (1 + \theta^1 + \dots + \theta^{l-k-1}) \theta^k \|x^1 - x^0\| = \\ &= \theta^k \frac{1 - \theta^{l-k}}{1 - \theta} \|x^1 - x^0\| \leq \frac{\theta^k}{1 - \theta} \|x^1 - x^0\|. \end{aligned} \quad (VI-1.3)$$

Ponieważ $\lim_{k \rightarrow \infty} \theta^k = 0$, stąd ciąg x^k , $k = 0, 1, 2, \dots$ spełnia warunek Cauchy'ego. Z zupełności przestrzeni $\mathbf{B}$ wynika rozważana zbieżność. Niech więc $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = x^*$. Z własności (VI-1.1) i definicji ciągu x^k wynika, iż

$$x^* = \lim_{k \rightarrow \infty} x^{k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} P(x^k) = P(\lim_{k \rightarrow \infty} x^k) = P(x^*).$$

Uzasadnienie jednoznaczności wyznaczenia x^* . Gdyby istniały dwa $x^*, x^{**} \in \mathbf{B}$ o własności

$$x^* = P(x^*), \quad x^{**} = P(x^{**}),$$

to wtedy z (VI-1.1) mamy

$$\|x^* - x^{**}\| = \|P(x^*) - P(x^{**})\| \leq \theta \|x^* - x^{**}\|$$

a ponieważ $\theta \in (0, 1)$, to $\|x^* - x^{**}\| = 0$ lub inaczej $x^* = x^{**}$. Nierówności (VI - 1.2a), (VI - 1.2b) wynikają bezpośrednio z (VI-1.3). □

VI-1.5 Uwaga

Przestrzeń euklidesowa $\mathbb{R}^n$ z normą $\|\cdot\|_p$, $p \in [1, \infty]$ jest przestrzenią Banacha.

VI-1.6 Wniosek

Jeżeli $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jest macierzą o normie naturalnej $\|T\|_p < 1$ a $c \in \mathbb{R}^n$ dowolnym wektorem, to wtedy istnieje jednoznacznie wyznaczone x^* o własności

$$x^* = Tx^* + c,$$

które jest granicą ciągu $x^{k+1} = Tx^k + c$, $k = 0, 1, 2, \dots$, $x^0 \in \mathbb{R}^n$ – dowolne. Dodatkowo ciąg x^k , $k = 0, 1, 2, \dots$ spełnia oszacowania (VI – 1.2a), (VI – 1.2b).

Dowód: Wystarczy przyjąć $P(x) \stackrel{\text{def}}{=} Tx + c$ i zastosować twierdzenie VI-1.4.

□

Metody iteracyjne wyznaczenia rozwiązania $x^* \in \mathbb{R}^n$ układu

$$Ax = b$$

polegają na wyznaczeniu $x^* \in \mathbb{R}^n$ które, dla odpowiednio dobranej macierzy T i wektora c , spełnia

$$x^* = Tx^* + c. \quad (\text{VI-1.4})$$

Na podstawie wniosku VI-1.6 dla macierzy o normie $\|T\| < 1$ rozwiązanie jest granicą

$$x^* = \lim_{k \rightarrow \infty} x^k, \quad x^{k+1} = Tx^k + c, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

gdzie $x^0 \in \mathbb{R}^n$ – dowolne.

VI-1.1. Elementarne, historyczne metody iteracyjne

Przedstawimy tu wywodzącą się z późnego [2, ss. 360] XVIIIw metodę Jacobiego i z roku [1, ss. 303] 1823 Gaussa-Seidela.

Dla $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ wprowadzamy następujące oznaczenia:

$$A = D - N - M$$

gdzie

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} \quad - \text{macierz diagonalna},$$

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{21} & \ddots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & \dots & -a_{nn-1} & 0 \end{bmatrix} \quad - \text{poddiagonalna},$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -a_{n-1n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad - \text{ naddiagonalna.}$$

Ogólnie, algorytmy iteracyjne przy oznaczeniach z wniosku VI-1.6 są postaci:

$$x^{k+1} = Tx^k + c, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{VI-1.5})$$

Nazewnictwo:

$$\begin{aligned} T & \quad - \text{ macierz iteracyjna,} \\ e^k & = x^k - x^* - \text{ wektor błędu,} \\ r^k & = Ae^k = Ax^k - b - \text{ wektor residualny (resztowy).} \end{aligned}$$

Algorytm Jacobiego

Równanie $Ax = b$ przekształcamy do postaci

$$x = D^{-1}(E + F)x + D^{-1}b.$$

Macierz iteracyjna w (VI-1.5), dla algorytmu Jacobiego jest następująca

$$T_J = D^{-1}(E + F) \quad c = D^{-1}b. \quad (\text{VI-1.6})$$

Algorytm w jawnej postaci

$$x_i^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{ii}} \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\infty} a_{ij} x_j^{(k)} - b_i \right), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (\text{VI-1.7})$$

Algorytm Gaussa-Siedla

Tu równanie $Ax = b$ przekształcamy do

$$x = (D - E)^{-1}Fx + (D - E)^{-1}b,$$

więc dla algorytmu Gaussa-Siedla mamy macierz T z (VI-1.5) postaci

$$T_{GS} = (D - E)^{-1}F, \quad c = (D - E)^{-1}b. \quad (\text{VI-1.8})$$

Zauważmy, że macierz $D - E$ jest dolnie trójkątna. Przy układaniu algorytmu zaczniemy od postaci

$$(D - E)x^{(k+1)} = Fx^{(k)} + b$$

i z uwagi, że macierz $D - E$ jest dolnie trójkątna, to wzór rekurencyjny

$$x_i^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{ii}} \left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} - b_i \right), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{VI-1.9})$$

przy danym $x^{(k)}$ wyznacza $x^{(k+1)}$. Tak więc, nie trzeba w sposób jawny wyliczać macierzy odwrotnej $(D - E)^{-1}$.

Zajmiemy się teraz zbieżnością obu tych metod.

VI–1.7 Definicja

Macierz $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jest silnie diagonalnie dominująca

- wierszowo, gdy spełnia: $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$,
- kolumnowo, gdy spełnia: $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ji}|$.

Gdy są spełnione oba warunki, to taką macierz nazywamy silnie diagonalnie dominująca.

VI–1.8 Twierdzenie

Jeżeli macierz A jest silnie diagonalnie dominująca, to wtedy ciąg iteracji (VI–1.5) w metodzie Jacobiego jest zbieżny.

Dowód:

Dla tej metody mamy

$$T_J = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \dots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Jeżeli T_J jest silnie diagonalnie dominująca wierszowo, to wtedy

$$\|T_J\|_\infty = \max_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} = \theta < 1.$$

w drugim przypadku macierzy silnie dominującej kolumnowo zachodzi

$$\|T_J\|_1 = \max_j \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} = \theta < 1.$$

Teraz na podstawie wniosku VI–1.6 ciąg iteracji (VI–1.5) jest zbieżny.

□

VI–1.9 Definicja (kryterium Sassenfelda)

Macierz $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ spełnia [6, ss. 57] kryterium Sassenfelda gdy

$$p \stackrel{\text{def}}{=} \max_{j=1, \dots, n} p_j < 1,$$

gdzie liczby p_j , $j = 1, \dots, n$ są określone rekurencyjnie

$$p_1 = \sum_{k=2}^n \frac{|a_{1k}|}{|a_{11}|}, \quad p_j = \sum_{k=1}^{j-1} \frac{|a_{jk}|}{|a_{jj}|} p_k + \sum_{k=j+1}^n \frac{|a_{jk}|}{|a_{jj}|}, \quad j = 2, \dots, n.$$

VI–1.10 Twierdzenie

Jeżeli macierz A spełnia kryterium Sassenfelda, to ciąg iteracji (VI–1.5) dla metody Gauss–Siedla jest zbieżny.

Dowód: Rozważmy [6, ss. 58] równanie

$$(D - E)x = Fz$$

dla $z \in \mathbb{R}^n$, $\|z\|_\infty = 1$. Zachodzi wtedy

$$x_j = - \sum_{k=1}^{j-1} \frac{a_{jk}}{a_{jj}} x_k - \sum_{k=j+1}^n \frac{a_{jk}}{a_{jj}} z_k, \quad j = 1, \dots, n.$$

Korzystając z definicji ciągu p_j , $j = 1, \dots, n$ dowodzimy indukcyjnie, że $|x_j| \leq p_j$, $j = 1, \dots, n$. Ponieważ założyliśmy kryterium Sassenfelda, to otrzymujemy

$$\|x\|_\infty \leq p = \max_{j=1, \dots, n} p_j < 1.$$

Wystarczy teraz napisać definicję naturalnej normy macierzowej

$$\frac{\|(D - E)^{-1}Fz\|_\infty}{\|z\|_\infty} = \|(D - E)^{-1}F\|_\infty = \|T_{GS}\|_\infty \leq p < 1$$

aby na podstawie wniosku VI-1.6 stwierdzić, że ciąg iteracji (VI-1.5) jest zbieżny.

□

VI-1.11 Wniosek

Jeżeli macierz A jest silnie diagonalnie dominująca wierszowo, to macierz ta spełnia kryterium Sassenfelda.

VI-1.12 Przykład

Trójdzielna macierz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

nie jest silnie diagonalnie dominująca wierszowo, ale spełnia kryterium Sassenfelda.

Dowód:

Brak dominacji wierszowej:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| = 2 = |a_{ii}| \quad - \text{dla każdego } i = 2, \dots, n-1.$$

Kryterium Sassenfelda:

$$p_1 = \frac{1}{2}, \quad p_j = \frac{1}{2}p_{j-1} + \frac{1}{2}, \quad j = 2, \dots, n-1, \quad p_n = \frac{1}{2}p_{n-1},$$

skąd

$$p_j = 1 - \frac{1}{2^j}, \quad j = 1, \dots, n-1, \quad p_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}.$$

Więc

$$p = 1 - \frac{1}{2^{n-1}} < 1.$$

□

VI–1.2. Metody relaksacyjne – przyspieszanie zbieżności

Można przeczytać w książce A. Ralstona [8, ss. 399–402] wydanej w 1965, że metoda Gaussa–Seidla należy do tak zwanych metod relaksacyjnych – bardzo wygodnych w obliczeniach ręcznych wykonywanych przez rachmistrzów! Odwołaliśmy się do tego zapisu aby przypomnieć, że omawiane metody służyły do ręcznego wykonywania obliczeń. Dokonamy teraz pewnej modyfikacji wzorów (VI–1.7) i (VI–1.9). Dla metody Jacobiego wzór (VI–1.7) można przedstawić w postaci

$$x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} = -\frac{1}{a_{ii}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j^{(k)} - b_i \right), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (\text{VI–1.10})$$

Podobnie dla metody Gaussa–Seidla i wzoru (VI–1.9) otrzymujemy

$$x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} = -\frac{1}{a_{ii}} \left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i}^n a_{ij} x_j^{(k)} - b_i \right), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (\text{VI–1.11})$$

Wprowadzamy teraz liczbę $\omega > 0$ – parametr relaksacji, przy pomocy którego modyfikujemy wzory (VI–1.10) i (VI–1.11) aby otrzymać

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j^{(k)} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (\text{VI–1.12})$$

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (\text{VI–1.13})$$

Wzór (VI–1.12) który jest modyfikacją algorytmu Jacobiego (VI–1.6) (za [6, ss. 60–63]) nazywa się metodą JOR – „Jacobi over-relaxation”. W oznaczeniach wzoru (VI–1.5) otrzymujemy macierz iteracji tej metody

$$T_{J_\omega} = \omega T_J + (1 - \omega)I, \quad c = \omega D^{-1}b.$$

Dla algorytmu Gaussa–Seidla wzór (VI–1.13) określa (według [1, t II, ss. 319] – sławną) metodę SOR – „successive over-relaxation”. W zapisie wektorowym z (VI–1.13) otrzymujemy

$$(I - \omega D^{-1}E)x^{(k+1)} = [(1 - \omega)I + \omega D^{-1}F]x^{(k)} + \omega D^{-1}b$$

skąd

$$(D - \omega E)x^{(k+1)} = [(1 - \omega)D + \omega F]x^{(k)} + \omega b.$$

Teraz widać, że macierz iteracji w (VI–1.5) dla metody SOR jest następująca:

$$T_{GS_\omega} = (D - \omega E)^{-1}[(1 - \omega)D + \omega F], \quad c = \omega(D - \omega E)^{-1}b. \quad (\text{VI–1.14})$$

Zajmiemy się zbieżnością metody SOR. W tym celu na podstawie własności VI–1.3 będziemy badać promień spektralny $\rho(T_{GS_\omega})$

VI–1.13 Twierdzenie (Kahan)

Warunkiem koniecznym zbieżności metody SOR jest $0 < \omega < 2$.

Dowód: [1, ss. 319], [6, ss. 62], [9]

Jeżeli $\mu_1, \dots, \mu_n$ są wartościami własnymi macierzy T_{GS_ω} , to są one w szczególności zerami wielomianu charakterystycznego i dlatego zachodzi

$$\prod_{j=1}^n \mu_j = \det(T_{GS_\omega}).$$

Ponieważ w określeniu (VI-1.13) macierz T_{GS_ω} jest iloczynem macierzy dolnie i górnio trójkątnych więc mamy

$$\det(T_{GS_\omega}) = \det(D - \omega E)^{-1} \det[(1 - \omega)D + \omega F] = (1 - \omega)^n.$$

Z obu równości otrzymaliśmy

$$\prod_{j=1}^n \mu_j = \det(T_{GS_\omega}) = (1 - \omega)^n$$

skąd wynika, że

$$\rho(T_{GS_\omega}) \geq |1 - \omega|.$$

Więc aby zachodziła własność (VI-1.3.d) tzn. $\rho(T_{GS_\omega}) < 1$, to musi być spełnione

$$0 < \omega < 2.$$

□

Za [1, t. II, tw. 10.5.4, ss. 336] (też [7, ss. 131], [5, tw. 7, ss. 234]) prawdziwe jest twierdzenie

VI-1.14 Twierdzenie

Jeżeli macierz A jest symetryczna i dodatnio określona, to metoda SOR jest zbieżna dla $0 < \omega < 2$.

VI-1.15 Przykład

Za [3, ss. 391] zastosujemy przedstawione metody do rozwiązywania układu

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 30 \\ -24 \end{bmatrix}$$

Obliczenia zostały zrealizowane przy pomocy MatLabowskich skryptów:

dla metody Jacobiego

```
% Jacobi
function [x,e] = Jac(A,b,xd,It)
[n,r] = size(A);
x      = zeros(n,1);
e      = zeros(It,1);
nor    = sqrt(xd'*xd);
D      = zeros(n,1);
for i=1:n
    D(i)      = -1/A(i,i);
    A(i,i)    = 0;
end;
x = zeros(n,1);
for i=1:It
    x      = D.*(A*x-b);
    e(i)    = sqrt((x-xd)'.*(x-xd))/nor;
end;
```

metody JOR i $\omega = 0.5$

```
% JOR
function [x,e] = JOR(A,b,om,xd,It)
[n,r] = size(A);
D      = zeros(n,1);
for i=1:n
    D(i) = 1/A(i,i);
end;
x      = zeros(n,1);
e      = zeros(It,1);
nor    = sqrt(xd'*xd);
for i=1:It
    x    = x + om*(b-A*x).*D;
    e(i) = sqrt((x-xd)'*(x-xd))/nor;
end;
```

metody Gaussa–Seidela

```
% Gauss–Seidel
function [x,e] = GS(A,b,xd,It)
[n,r] = size(A);
x      = zeros(n,1);
e      = zeros(It,1);
nor    = sqrt(xd'*xd);
for k=1:It
    for i=1:n
        r = 0;
        for j=1:i-1
            r = r+A(i,j)*x(j);
        end;
        for j=i+1:n
            r = r+A(i,j)*x(j);
        end;
        x(i) = -(r-b(i))/A(i,i);
    end;
    e(k) = sqrt((x-xd)'*(x-xd))/nor;
end;
```

metody SOR i $\omega = 1.25$

```
% SOR
function [x,e] = SOR(A,b,om,xd,It)
[n,r] = size(A);
x      = zeros(n,1);
e      = zeros(It,1);
d      = sqrt(xd'*xd);
for k=1:It
    for i=1:n
        r = 0;
        for j=1:i-1
            r = r+A(i,j)*x(j);
        end;
        for j=i:n
            r = r+A(i,j)*x(j);
        end;
        x(i) = x(i)+om*(b(i)-r)/A(i,i);
    end;
    e(k) = sqrt((x-xd)'*(x-xd));
end;
```

Główny skrypt

```

clear all;
clc;
A      = [4 3 0; 3 4 -1; 0 -1 4];
b      = [24; 30; -24];
xd     = A\b;
a      = 5;
It     = 25;
[x1,e1] = Jac(A,b,xd,It);
[x2,e2] = JOR(A,b,0.5,xd,It);
[x3,e3] = GS(A,b,xd,It);
[x4,e4] = SOR(A,b,1.25,xd,It);
plot([a:It],e1(a:It),'k-',[a:It],e2(a:It),'k—',
      [a:It],e3(a:It),'k:',[a:It],e4(a:It),'k-.'');
axis([a It -0.01 0.26]);
legend('Jacobi','JOR','Gauss-Seidel','SOR',1);

```

Wyniki obliczeń zostały przedstawione na rys. VI-1.

Rysunek VI-1. Wykresy błędów względnych $\frac{\|x^k - x^*\|_2}{\|x^*\|_2}$, $k = 5, \dots, 25$.

Literatura

- [1] A. Björck and G. Dahlquist, Numerical mathematics and scientific computation, SIAM, Philadelphia, 2003,
Wersję roboczą polecił A. Szustalewicz. Jest ona dostępna pod adresem <http://www.mai.liu.se/~akbjjo/NMbook.html>.
- [2] R.L. Burden and Faires, Numerical methods, 3, Brooks-Cole, Florence, 2003,
Dostępna na stronie WWW autorów, 7.XII.03r.
- [3] R.L. Burden, J.D. Faires, and Reynolds A.C., Numerical analysis, Prindle, Weber & Schmidt, Boston, Massachusetts, 1981.
- [4] A. Iserles and A. Shadrin, Numerical analysis, 7.XII.03r: dostępna pod adresem <http://www.damtp.cam.ac.uk/user/na/na.html>, 2003,
Lecture notes for the course, DAMTP, University of Cambridge.
- [5] D. Kincaid and W. Cheney, Numerical analysis, Brooks, USA, 1996,
Książka jest w bibliotece Instytutu Informatyki Uniwersytetu Wrocławskiego.
- [6] R. Kress, Numerical analysis, SV, Berlin, 1998.
- [7] A. Quarteroni, R. Sacco, and F. Saleri, Numerical mathematics, Springer, 2000.
- [8] A. Ralston, Wstęp do analizy numerycznej, PWN, Warszawa, 1983,
Tłumaczył R. Zuber, wydanie polskie opracował St. Paszkowski. Do wydania polskiego jest dedykacja autora.
- [9] J. Stoer and R. Bulirsch, Introduction to numerical analysis, SV, Berlin, 1993.

Wrocław, dnia 3 grudnia 2010

(–) Krzysztof Tabisz
tabisz@math.uni.wroc.pl