

VIII Wykład: 17 XII 10 r.**POSTAWOWE FAKTY Z ANALIZY:**

- $\mathbb{A} \subset \mathbb{R}$ – jest ograniczony, gdy $\exists_M \forall_{a \in \mathbb{A}} |a| \leq M$;
- Niech $\mathbb{A} \subset \mathbb{R}$ ograniczony i $\mathbb{A} \neq \emptyset$. Wtedy $\alpha = \sup \mathbb{A}$, gdy
 - $\forall_{a \in \mathbb{A}} a \leq \alpha$,
 - $(\forall_{a \in \mathbb{A}} a \leq \beta) \implies \alpha \leq \beta$,
- aksjomat ciągłości $\mathbb{R}$: dla każdego niepustego ograniczonego $\mathbb{A} \subset \mathbb{R}$ istnieje $\sup \mathbb{A}$;
- aksjomat ciągłości $\mathbb{R}$ jest równoważny faktowi: każdy ciąg monotoniczny ograniczony jest zbieżny;
- każdy odcinek $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ograniczony jest zwarty, tzn. z każdego ciągu jego elementów można wybrać podciąg zbieżny (granica wybranego podciągu ma należeć do $[a, b]$!);
- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ma granice w punkcie x_0 , tzn. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g$ gdy
 - (Cauchy) $\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta(\varepsilon) > 0} \forall_x 0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \implies |f(x) - g| < \varepsilon$,
 - (Heine) $\forall_{(x_n), x_n \neq x_0} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0 \right) \implies \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = g \right)$.
- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła w x_0 , gdy $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$;
- trzy podstawowe twierdzenia o funkcjach $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ – ciągłych:
 - $y = f(x)$ jest ograniczona na $[a, b]$,
 - $y = f(x)$ osiąga swoje kresy na $[a, b]$,
 - przyjmuje wszystkie wartości pośrednie między $\min_{x \in [a, b]} f(x)$ a $\max_{x \in [a, b]} f(x)$.
 Innymi słowy $f([a, b]) = [\min_{x \in [a, b]} f(x), \max_{x \in [a, b]} f(x)]$.
- określenie pochodnej $y = f(x)$ w x_0 : $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$;
- warunek konieczny ekstremum $y = f(x)$ przyjętego w x_0 : $f'(x_0) = 0$;
- trzy twierdzenia o wartości średniej dla funkcji $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ – ciągłych i różniczkowalnych na (a, b) :
 - (Rolle) jeżeli dodatkowo $f(a) = f(b) = 0$, to $\exists_{\xi \in (a, b)} f'(\xi) = 0$,
 - (Lagrange) $\exists_{\xi \in (a, b)} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(\xi)$,
 - (wzór Taylor'a) jeżeli dodatkowo $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ jest $(n + 1)$ -razy różniczkowalna, to wtedy

$$\forall_{x, x_0 \in (a, b)} \exists_{\xi \in (x_0, x)} f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + E_n(x),$$

gdzie

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

Opracowano na podstawie: [1] i [3].**PRZYKŁAD** strzelanie z armaty na odległość d :

- model matematyczny:

$$y''(t) = -g, \quad \begin{cases} y(0) = 0, \\ y'(0) = V_0 \sin \theta \end{cases},$$

- rozwiązanie teoretyczne: $T = \frac{2V_0 \sin \theta}{g}$,
- czas lotu pocisku: $T = \frac{2V_0 \sin \theta}{g}$,
- przebyta droga przez pocisk: $\frac{2V_0^2 \cos \theta \sin \theta}{g} = d$,

- określenie nieliniowego równania:

$$f(\theta) \equiv \frac{2V_0^2 \cos \theta \sin \theta}{g} - d = 0,$$

- dyskusja warunków istnienia rozwiązania,
- **założenie o funkcji** $y = f(\theta)$ ciągłości,
- algorytm znajdowania rozwiązania nieliniowego równania *przez połowienie przedziału*:

```
while(abs(b-a)>eps)
{
    c = (b+a)/2;
    if(c==a || c==b)
        return;
    fc = f(c);
    if(fc==0)
    {
        a = b = c;
        fa = fb = fc;
        return;
    }
    if(sign(fc)!=sign(fb))
    {
        a = c;
        fa = fc;
    }
    else
    {
        b = c;
        fb = fc;
    }
}
```

TWIERDZENIE (*Metoda Newton'a*) Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dwukrotnie różniczkowalna w sposób ciągły oraz r będzie jednokrotnym zerem równania $f(x) = 0$. Wtedy istnieje otoczenie r i stała C takie, że jeżeli przyjmimy punkt startowy x_0 z tego otoczenia dla ciągu iteracji

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \geq 0$$

to $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = r$ oraz

$$|x_{n+1} - r| \leq C(x_n - r)^2, \quad n \geq 0.$$

DOWÓD:

r jest jednokrotnym zerem funkcji $y = f(x)$, gdy $f(r) = 0$ oraz $f'(r) \neq 0$. Niech

$$e_n = x_n - r, \quad \text{oznacza błąd przybliżenia.}$$

Wtedy mamy

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= x_{n+1} - r = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - r \\ &= e_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{e_n f'(x_n) - f(x_n)}{f'(x_n)} \end{aligned} \quad (\text{VIII-1.1})$$

Ze wzoru *Taylor'a* mamy

$$0 = f(r) = f(x_n - e_n) = f(x_n) - e_n f'(x_n) + \frac{1}{2} e_n^2 f''(\xi_n), \quad \text{gdzie } \xi_n \in (r, x_n).$$

Skąd otrzymujemy

$$e_n f'(x_n) - f(x_n) = \frac{1}{2} f''(\xi_n) e_n^2.$$

Co wstawiając do (1) otrzymujemy

$$e_{n+1} = \frac{1}{2} \frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)} e_n^2 \approx \frac{1}{2} \frac{f''(r)}{f'(r)} e_n^2 = C e_n^2. \quad (\text{VIII-1.2})$$

Dla $C \approx 1$ i $e_n \approx 10^{-4}$ z (2) mamy: $e_{n+1} \approx 10^{-8}$, $e_{n+2} \approx 10^{-16} \dots$. W ten sposób błąd e_{n+1} jest w przybliżeniu równy e_n^2 co oznacza, iż mamy do czynienia z tzw. **kwadratową zbieżnością**. Przejdźmy teraz do formalnego dowodu zbieżności metody. Niech

$$c(\delta) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \frac{\max_{|x-r| \leq \delta} |f''(x)|}{\min_{|x-r| \leq \delta} |f'(x)|}, \quad \delta > 0. \quad (\text{VIII-1.3})$$

Ponieważ $f'(r) \neq 0$ oraz $y = f''(x)$ jest funkcją ciągłą, to $\lim_{\delta \rightarrow 0} \delta c(\delta) = 0$. Więc istnieje taka δ , iż $\varrho = \delta c(\delta) < 1$. Teraz, jeżeli zaczniemy proces iteracji z punktu x_0 , spełniającego $|x_0 - r| \leq \delta$, to wtedy $|e_0| \leq \delta$ i $|\xi_0 - r| \leq \delta$ i z określenia $c(\delta)$ otrzymujemy

$$\frac{1}{2} \left| \frac{f''(\xi_0)}{f'(x_0)} \right| \leq c(\delta).$$

Tym samym z (3) mamy

$$|x_1 - r| = |e_1| \leq e_0^2 c(\delta) = |e_0| |e_0| c(\delta) \leq |e_0| \delta c(\delta) = |e_0| \varrho < |e_0| \leq \delta.$$

To pokazuje, że kolejny punkt x_1 jest w δ otoczeniu r i iteracja może być kontynuowana

$$\begin{aligned} |e_1| &\leq \varrho |e_0| \\ |e_2| &\leq \varrho |e_1| \leq \varrho^2 |e_0| \\ |e_3| &\leq \varrho |e_2| \leq \varrho^3 |e_0| \\ &\vdots \end{aligned}$$

Ogólnie mamy

$$|e_n| \leq \varrho^n |e_0|.$$

Ponieważ $0 \leq \varrho < 1$, to mamy $\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho^n = 0$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} e_n = 0$. □

Jako ćwiczenie udowodnić:

TWIERDZENIE Jeśli $f \in C^2(\mathbb{R})$ jest malejąca, wypukła i istnieje r – rozwiązanie równania $f(x) = 0$, to rozwiązanie to jest jedyne i ciąg iteracji *Newton'a* startujący z dowolnego $x_0 \in \mathbb{R}$ jest do niego zbieżny.

Rozwiązywanie równania $f(x) = 0$ *metodą siecznych*.

W metodzie *Newton'a*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

przybliżamy

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

otrzymuje wtedy (*metoda siecznych*)

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \left[\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \right] = \frac{x_{n-1}f(x_n) - x_nf(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Komentarz:

Jeśli określimy

$$\varphi(u, v) = \begin{cases} u - f(u) \left[\frac{u-v}{f(u)-f(v)} \right], & \text{dla } u \neq v \\ u - \frac{f(u)}{f'(u)}, & \text{dla } u = v \end{cases}$$

to wtedy ciąg iteracyjny z metody *siecznych* możemy zapisać w postaci

$$x_{n+1} = \varphi(x_n, x_{n-1}), \quad \text{gdzie } \varphi \text{ określa iteracje.}$$

Szukamy punktu stałego r ,

$$r = \varphi(r, r)$$

tej iteracji. Ponieważ prawa strona zależy od dwóch kolejnych punktów to metodę tą nazywa się też *dwupunktową*.

Analiza zbieżności

Będziemy wzorować się na dowodzie TWIERDZENIA w metodzie *Newton'a*.

Niech, tak jak poprzednio $e_n = x_n - r$. Wtedy

$$e_{n+1} = x_{n+1} - r = \frac{f(x_n)x_{n-1} - f(x_{n-1})x_n}{f(x_n) - f(x_{n-1})} - r = \frac{f(x_n)e_{n-1} - f(x_{n-1})e_n}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Dzieląc przez $e_n e_{n-1}$ i wstawiając $\frac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = 1$ otrzymujemy

$$e_{n+1} = \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \times \frac{\frac{f(x_n)}{e_n} - \frac{f(x_{n-1})}{e_{n-1}}}{\frac{x_n}{e_n} - \frac{x_{n-1}}{e_{n-1}}} \times e_n e_{n-1} \quad (\text{VIII-1.4})$$

Z wzoru *Taylor'a* mamy

$$f(x_n) = f(r + e_n) = f(r) + e_n f'(r) + \frac{1}{2} e_n^2 f''(r) + \mathcal{O}(e_n^3).$$

Ponieważ $f(r) = 0$, to

$$\frac{f(x_n)}{e_n} = f'(r) + \frac{1}{2} e_n f''(r) + \mathcal{O}(e_n^2)$$

oraz dla wskaźnika $n - 1$

$$\frac{f(x_{n-1})}{e_{n-1}} = f'(r) + \frac{1}{2} e_{n-1} f''(r) + \mathcal{O}(e_{n-1}^2).$$

Ostatecznie

$$\frac{f(x_n)}{e_n} - \frac{f(x_{n-1})}{e_{n-1}} = \frac{1}{2} (e_n - e_{n-1}) f''(r) + \mathcal{O}(e_{n-1}^2).$$

czywiście $x_n - x_{n-1} = e_n - e_{n-1}$. Możemy teraz

$$\frac{\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{e_n} - \frac{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})}{e_{n-1}}}{x_n - x_{n-1}} \approx \frac{1}{2} f''(r).$$

Pierwszy czynnik w wyrażeniu (4)

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \approx \frac{1}{f'(r)}.$$

Pokazaliśmy w ten sposób, iż

$$e_{n+1} \approx \frac{1}{2} \frac{f''(r)}{f'(r)} e_n e_{n-1} = C e_n e_{n-1}. \quad (\text{VIII-1.5})$$

Otrzymane równanie (5) jest analogiczne do równania (2) z metody *Newton'a*. Aby oszacować **rzęd zbieżności** metody założmy, że

$$|e_{n+1}| \sim A |e_n|^\alpha, \quad \text{gdzie } A > 0 \text{ stała.}$$

Tzn. α -rzęd zbieżności metody oznacza, iż

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|e_{n+1}|}{A |e_n|^\alpha} = 1.$$

Wstawiając

$$|e_n| \sim A |e_{n-1}|^\alpha \quad \text{i} \quad |e_{n-1}| \sim (A^{-1} |e_n|)^\frac{1}{\alpha}$$

do (5), otrzymujemy

$$A^{1+\frac{1}{\alpha}} |C|^{-1} \sim |e_n|^{1-\alpha+\frac{1}{\alpha}}.$$

Ponieważ prawa strona zależy od e_n , $\lim_{n \rightarrow \infty} e_n = 1$, to $1 - \alpha + \frac{1}{\alpha} = 0$, więc $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.62$. W ten sposób otrzymaliśmy, iż szybkość zbieżności *metody siecznych* jest **superliniowa** tzn. lepsza niż liniowa. Z równania $1 + \frac{1}{\alpha} = \alpha$ otrzymujemy

$$A = |C|^{\frac{1}{1+\frac{1}{\alpha}}} = |C|^{\frac{1}{\alpha}} = |C|^{\alpha-1} = |C|^{0.62} = \left| \frac{f''(r)}{2f'(r)} \right|^{0.62}.$$

Z tak wyliczonym A otrzymujemy

$$|e_{n+1}| \approx A |e_n|^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}.$$

Metody „przez połowienie przedziału”, *Newton'a (stycznych)* oraz *siecznych* wyznaczenia pierwiastka $r \in \mathbb{R}$ będącego rozwiązaniem równania

$$f(r) = 0 \quad (\text{VIII-1.6})$$

są przykładami metod iteracyjnych w których r jest granicą ciągu

$$x_{n+k} = \varphi(x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+(k-1)}), \quad n, k \in \mathbb{N}, \quad k - \text{ustalone.} \quad (\text{VIII-1.7})$$

Dla metody *Newton'a* mamy:

$$\varphi(u) = u - \frac{f(u)}{f'(u)},$$

a dla siecznych

$$\varphi(u, v) = \begin{cases} \frac{vf(u)-uf(v)}{f(u)-f(v)}, & \text{dla } u \neq v \\ u - \frac{f(u)}{f'(u)}, & \text{dla } u = v \end{cases}$$

Pierwiastek r równania (VIII–1.6) jest granicą ciągu

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n,$$

i dodatkowo jest spełniona równość wynikająca z (VIII–1.7)

$$r = \varphi(r, \dots, r).$$

Definicja [2, ss. 298–299] *rzęd metody (iteracyjnej)*

Niech

$$e_n = x_n - r,$$

będzie błędem n -tej iteracji. Załóżmy dodatkowo, że ciąg przybliżeń (VIII–1.7) równania (VIII–1.6) jest zbieżny

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = r.$$

Mówimy, że w punkcie r metoda jest rzędu p , jeśli istnieje liczba rzeczywista $p \geq 1$ taka, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1} - r|}{|x_n - r|^p} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} = C \neq 0.$$

Stałą $C \neq 0$ nazywamy *stałą asymptotyczną błędu*, jest ona zależna od funkcji $y = f(x)$.

Dla metody *Newton'a* wykazaliśmy, iż $p = 2$ a przy metodzie siecznych otrzymaliśmy $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618\dots$

Literatura

- [1] D. Kincaid and W. Cheney, Numerical analysis, Brooks, USA, 1996,
Książka jest w bibliotece Instytutu Informatyki Uniwersytetu Wrocławskiego.
- [2] A. Ralston, Wstęp do analizy numerycznej, PWN, Warszawa, 1983,
Tłumaczył R. Zuber, wydanie polskie opracował St. Paszkowski. Do wydania polskiego jest dedykacja autora.
- [3] G.W Stewart, Afternotes on numerical analysis, SIAM, 1996,
Polecona przez A. Szustalewicza.

Wrocław, dnia 17 grudnia 2010

(-) Krzysztof Tabisz
tabisz@math.uni.wroc.pl