

Lista Nr 03, ćwiczenia

(wyk. 19.XI.09r)

Dla liczby naturalnej $n \in \mathbb{N}_+$ określamy zbiory:

$$\begin{aligned} Z_n &= \{0, 1, \dots, n-1\} \\ Z_n^* &= \{a \in Z_n : a > 0 \text{ \& } \text{NWD}(a, n) = 1\}. \end{aligned}$$

Dla dodatnich liczb naturalnych określamy następująco funkcję $\varphi : \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{N}$ – Eulera (tocjent, [Totient Function](#)¹):

$$\varphi(n) = \#Z_n^*,$$

która przypisuje każdej liczbie naturalnej liczbę liczb względnie z nią pierwszych i mniejszych od niej.

Zadania:

1. Uzasadnić, że $\varphi(24) = 8$.
2. Wykazać, że jeśli p jest liczbą pierwszą, to $\varphi(n) = n - 1$.
3. Podobnie wykazać, że dla liczby pierwszej p zachodzi i α – naturalnej:

$$\varphi(p^\alpha) = p^\alpha \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

4. Jeśli p, q są liczbami pierwszymi, to $\varphi(pq) = (p-1)(q-1)$.
5. Ogólnie, dla dowolnego $n > 0$ zachodzi:

$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

6. Udowodnić [twierdzenie Eulera](#)² o liczbach pierwszych. Jeśli $\text{NWD}(n, a) = 1$, to $n | (a^{\varphi(n)} - 1)$.
7. Wykazać [małe twierdzenie Fermata](#)³ Jeśli p jest liczbą pierwszą oraz $\text{NWD}(p, a) = 1$, to $p | (a^{p-1} - 1)$.

Wrocław, dnia 30/11/2009

¹ <http://mathworld.wolfram.com/TotientFunction.html>

² [http://pl.wikipedia.org/wiki/Twierdzenie_Eulera_o_liczbach_względnie_pierwszych](http://pl.wikipedia.org/wiki/Twierdzenie_Eulera_o_liczbach_wzgl%C4%99dnie_pierwszych)

³ http://pl.wikipedia.org/wiki/Małe_twierdzenie_Fermata