

1 Dodatek do wykładu nr. 4. (Reguły różniczkowania).

1.1 Pochodna funkcji potęgowej

Reguła potęgowa podana na wykładzie mówi, że pochodną funkcji potęgowej $f(x) = x^n$ jest funkcja $f' = nx^{n-1}$. Podamy teraz formalny dowód tego faktu. Istotnym elementem dowodu jest postać dwumianu Newtona czyli uogólnienie znanych ze szkoły wzoru skróconego mnożenia

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2,$$

na przypadek $(x + y)^n$ dla dowolnej liczby naturalnej n .

Lemat. (Dwumian Newtona). *Jeśli n jest liczbą naturalną, to*

$$(x + y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i y^{n-i}.$$

Korzystając z definicji symbolu Newtona

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i(n-i)!} \quad \text{konwencję } 0! = 1,$$

możemy wzór na dwumian Newtona napisać w postaci następującej sumy

$$\begin{aligned} (x + y)^n = & x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2 \cdot 1}x^{n-2}y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1}x^{n-3}y^3 \\ & + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k(k-1)\dots 2 \cdot 1}x^{n-k}y^k + \dots + nxy^{n-1} + y^n. \end{aligned}$$

Dowód. Zaczynamy od definicji pochodnej:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}.$$

Skorzystajmy z twierdzenia dwumianowego i rozpiszemy licznik ułamka z definicji pochodnej:

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= (x+h)^n - x^n \\ &= (c_0x^n + c_1x^{n-1}h + c_2x^{n-2}h^2 + c_3x^{n-3}h^3 + \dots + c_{n-1}xh^{n-1} + c_nh^n) - x^n, \end{aligned}$$

dla przejrzystości przez c_k oznaczyliśmy stałą stojącą w rozwinięciu dwumianu, przy wyrazie $x^k y^{n-k}$.

Ponieważ $c_0 = 1$, więc wyraz x^n znika i możemy napisać:

$$\begin{aligned} (x+h)^n - x^n &= (x^n + c_1x^{n-1}h + c_2x^{n-2}h^2 + c_3x^{n-3}h^3 + \dots + c_{n-1}xh^{n-1} + c_nh^n) - x^n \\ &= c_1x^{n-1}h + c_2x^{n-2}h^2 + c_3x^{n-3}h^3 + \dots + c_{n-1}xh^{n-1} + c_nh^n. \end{aligned}$$

Wszystkie pozostałe czynniki mają h w swoim składzie, który możemy wyciągnąć przed nawias:

$$(x+h)^n - x^n = h [c_1x^{n-1} + c_2x^{n-2}h + c_3x^{n-3}h^2 + \dots + c_{n-1}xh^{n-2} + c_nh^{n-1}].$$

Podstawiając do definicji pochodnej otrzymujemy:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h [c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} h + c_3 x^{n-3} h^2 + \dots + c_{n-1} x h^{n-2} + c_n h^{n-1}]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} [c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} h + c_3 x^{n-3} h^2 + \dots + c_{n-1} x h^{n-2} + c_n h^{n-1}]. \end{aligned}$$

Zwróćmy uwagę, że wszystkie wyrazy z wyjątkiem pierwszego mają h jako czynnik, więc są zbieżne do zera, gdy $h \rightarrow 0$. Stąd $f'(x) = c_1 x^{n-1}$, a ponieważ $c_1 = n$, więc

$$f'(x) = n x^{n-1},$$

co dowodzi regułę.

1.2 Pochodna iloczynu funkcji.

Na wykładzie podana została reguła różniczkowania iloczynu funkcji:

Reguła iloczynu: Jeśli $f(x)$ i $g(x)$ są dwiema funkcjami, z których każda jest różniczkowalna, to

$$\frac{d[f(x)g(x)]}{dx} = \frac{df(x)}{dx}g(x) + \frac{dg(x)}{dx}f(x).$$

Innym zapisem tej reguły jest

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x).$$

Teraz podamy formalny dowód tego faktu.

Dowód. Niech $k(x) = f(x)g(x)$, będzie iloczyn dwóch funkcji. Z definicji pochodnej

$$k'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(x+h) - k(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}.$$

Dodanie wyrażenia $f(x)g(x+h) - f(x)g(x+h) = 0$ równego zero do licznika ułamka w definicji pochodnej pozwala nam dokonać następującej faktoryzacji:

$$\begin{aligned} k'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) - f(x)]g(x+h) + f(x)[g(x+h) - g(x)]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right]. \end{aligned}$$

Ze względu na własności granicy możemy rozdzielić granicę

$$\begin{aligned} k'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) + \lim_{h \rightarrow 0} f(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \end{aligned}$$

W ten sposób udowodniliśmy regułę dotyczącą różniczkowania iloczynu funkcji

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

1.3 Pochodna ilorazu funkcji.

Podamy formalny dowód podanej na wykładzie zasadą różniczkowania ilorazu funkcji.

Reguła ilorazu: Jeśli $f(x)$ i $g(x)$ są dwiema funkcjami, z których każda jest różniczkowalna, to

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\frac{df(x)}{dx} g(x) - \frac{dg(x)}{dx} f(x)}{[g(x)]^2}.$$

Możemy to również zapisać w formie

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{[g(x)]^2}.$$

Dowód. Dowód ten wynika również z definicji pochodnej i wymaga jedynie trochę arytmetyki. Niech $k(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Korzystając z definicji pochodna otrzymujemy:

$$\begin{aligned} k'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(x+h) - k(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left[\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)} \right]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)} \right]. \end{aligned}$$

Biorąc wspólny mianownika, a następnie dodając w liczniku

$$g(x+h)f(x+h) - g(x+h)f(x+h) = 0,$$

otrzymamy:

$$\begin{aligned} k'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{f(x+h)g(x) - f(x+h)g(x+h) + f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{-f(x+h)[g(x+h) - g(x)] + g(x+h)[f(x+h) - f(x)]}{g(x+h)g(x)} \right]. \end{aligned}$$

Wykorzystując własności granic i definicję pochodnej dla $g'(x)$ oraz f' prowadzi do:

$$\begin{aligned}
 k'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{-f(x+h)}{g(x+h)g(x)} \frac{[g(x+h) - g(x)]}{h} + \frac{g(x+h)}{g(x+h)g(x)} \frac{[f(x+h) - f(x)]}{h} \right] \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{-f(x+h)}{g(x+h)g(x)} \right] \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{g(x+h)}{g(x+h)g(x)} \right] \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 &= \frac{-f(x)g'(x) + g(x)f'(x)}{[g(x)]^2} \\
 &= \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{[g(x)]^2}.
 \end{aligned}$$

W ten sposób udowodniliśmy zasadę dotyczącą różniczkowania ilorazu funkcji.

1.4 Pochodna złożenia funkcji.

Przedstawiamy teraz argumenty uzasadniające regułę łańcuchowej różniczkowania złożenia funkcji. Przypomnijmy, że reguła to podaje następujący sposób wyznaczania pochodnej złożenia funkcji:

Zasada łańcucha.

Jeśli $y = f(u)$ i $u = g(x)$ są dwiema funkcjami, to pochodna funkcji złożonej $h(x) = f(g(x))$ jest równa

$$\frac{d[f(g(x))]}{dx} = \frac{dh}{dx} = \frac{dy}{du} = \frac{df}{du} \frac{du}{dx},$$

lub w innej notacji

$$[f(g(x))]' = g'(x) \cdot f'(g(x)).$$

Jeśli $y = g(u)$ i $u = f(x)$ są funkcjami różniczkowalnymi, a $h(x) = g(f(x)) = y$ to funkcja złożona, wówczas reguła łańcuchowa różniczkowania stwierdza, że

$$\frac{dh}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}.$$

Dowód. Najpierw zauważamy, że jeśli funkcja jest różniczkowalna, to jest również ciągła. Z powodu tej ciągłości, gdy x zmienia się bardzo nieznacznie, również $u(x)$ może się zmienić tylko trochę - nie ma gwałtownych skoków. Tak więc, używając przyjętej notacji, jeśli $\Delta x \rightarrow 0$ to $\Delta u \rightarrow 0$. Rozważmy teraz definicję pochodnej dy/du :

$$\frac{dy}{du} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u}.$$

Oznacza to, że dla każdego (skończonego) Δu ,

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{dy}{du} + \epsilon,$$

gdzie $\epsilon \rightarrow 0$ gdy $\Delta u \rightarrow 0$. Następnie

$$\Delta y = \frac{dy}{du} \Delta u + \epsilon \Delta u.$$

Teraz podzielić obie strony przez pewien (niezerowy) czynnik Δx :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{du} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \epsilon \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Biorąc $\Delta x \rightarrow 0$ otrzymujemy $\Delta u \rightarrow 0$ (dzięki ciągłości), a zatem również $\epsilon \rightarrow 0$, więc ostatecznie

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}.$$