

Zadania i problemy do wykładu Matematyka dla specjalności GiBE
(ZESTAW NR 10)

ZADANIA

Zadanie 1. Korzystając ze wzoru na całkę sumy funkcji oblicz wartość następujących całek nieoznaczonych:

(a) $\int \left(f(x) = x^5 + \frac{x+1}{\sqrt{x^5}} + \frac{1}{x^5} \right) dx$

(b) $\int \left(\cos x - \frac{1}{x} \right) dx$

(c) $\int (5x^4 - 6x^2 - x + 5) dx$

(d) $\int \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1} dx$

Uwaga. W przykładzie (d) skorzystaj z faktu, że

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = x + \arctg x + c.$$

Zadanie 2. Korzystając ze wzoru na całkowanie przez części oblicz wartość następujących całek nieoznaczonych:

(a) $\int x \ln x dx$

(b) $\int x e^x dx$

(c) $\int x^2 e^x dx$

(d) $\int (x^3 - 6x + 21) \cos 3x dx$

Uwaga. Przykład (d) wymaga kilkukrotnego skorzystania ze wzoru na całkowanie przez części.

Zadanie 3. Korzystając ze wzoru na całkowanie przez podstawienie oblicz wartość następujących całek nieoznaczonych:

(a) $\int \frac{3x^2}{1+x^6} dx$

(b) $\int \sin x \cos x dx$

(c) $\int \sqrt{2x+1} dx$

(d) $\int (3x+6) (x^2+4x-10)^{2021} dx$

Zadanie 4. Oblicz wartość następujących całek nieoznaczonych:

(a) $\int \left(\frac{5}{x+4} - x^2 \right) dx$	(b) $\int (\sin(x-1) + \cos(x-1)) dx$
(c) $\int \left(\sqrt[3]{e^x} + \sqrt{\frac{1}{x-7}} \right) dx$	(d) $\int \left(\sqrt[7]{x+1} + \frac{x^4}{3} \right) dx$
(e) $\int (2x^2 + 3x - 1)x dx$	(f) $\int (4x^4 - 2x^2 + e^x) dx$

Zadanie 5. Oblicz pole figury ograniczonej krzywymi:

(a) $x = 0, \quad x = 5, \quad y = x(5-x) + 1;$
(b) $x = 0, \quad x = 3, \quad y = \sqrt{x+1};$
(c) $y = x(5-x) + 1, \quad x \in [0, \pi];$
(d) $x = \ln 2, \quad x = \ln 5, \quad y = \exp\{-x\};$
(e) $x = e^2, \quad x = e^5, \quad y = \frac{1}{x}.$

Zadanie 6. Oblicz pole zawarte pomiędzy krzywą $y = x^2 - 1$ i osią OX , ograniczone od prawej prostą $x = 2$, a od lewej prostą $x = 0$.

Zadanie 7. Oblicz wartość następujących całek oznaczonych:

(a) $\int_1^2 (x^4 - 3x^2) dx$	(b) $\int_0^\pi (3x^2 - \cos(3x)) dx$	(c) $\int_0^b e^{-kx} dx$
(d) $\int_0^x (y^2 + 3y - 1) dy$	(e) $\int_0^{\pi/4} (\cos(x) + \sin(2x)) dx$	(f) $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$
(g) $\int_1^e (x + x^{-1}) dx$	(h) $\int_0^{\pi/6} (\cos(2x) + \sin(x)) dx$	(i) $\int_1^5 \frac{x^2 + 1}{x} dx$
(j) $\int_0^1 (e^{2t} + e^{-2t}) dt$	(k) $\int_0^{\pi/2} 3(\sin(x) + 1)^2 \cos(x) dx$	(l) $\int_0^1 x\sqrt{x^3 + 1} dx$

Zadanie 8. Sumę całek oznaczonych $\int_{-1}^0 (1+x)e^{-kx} dx + \int_0^1 (1-x)e^{-kx} dx$, gdzie $k \neq 0$, można zapisać w postaci jednej całki oznaczonej.

- Skorzystaj z podstawienia $y = -x$, w pierwszej całce.
- Zamień granice całkowania w nowo zdefiniowanej całce wykorzystując fakt, że

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx,$$

dla dowolnej funkcji f dla której te całki są zdefiniowane.

- Dodaj obie całki, tak aby otrzymać jedną całkę.