

Zadania i problemy do wykładu Matematyka dla specjalności GiBE
(ZESTAW NR 1A)

ZADANIA

Zadanie 1. Funkcje wymierne. Opisz kształt wykresu funkcji $y = \frac{Ax^n}{b+x^m}$ w dwóch przypadkach:

- (a) $n > m$
- (b) $m > n$.

Zadanie 2. Funkcje potęgowe z ujemnymi potęgami. Rozważ funkcję $f(x) = \frac{A}{x^a}$, gdzie $A > 0$, $a > 1$, i jest liczbą naturalną. Jest to ta sama funkcja, co $f(x) = Ax^{-a}$, która jest funkcją potęgową o ujemnej potędze.

- (a) Naskicuj zgrubny wykres tej funkcji dla $x > 0$.
- (b) Jak zmienia się funkcja, gdy rośnie A ?
- (c) Jak zmienia się funkcja, gdy zwiększymy wartość a ?

Zadanie 3. Przecięcia funkcji o ujemnych potęgach. Rozważ dwie funkcje

$$f(x) = \frac{A}{x^a}, \quad g(x) = \frac{B}{x^b}.$$

Załóżmy, że $A, B > 0$, oraz $a, b > 1$ i $A > B$. Ustal, gdzie te funkcje przecinają się dla dodatnich wartości x .

Zadanie 4. Zera wielomianów. Znajdź wszystkie rzeczywiste zera następujących wielomianów:

- (a) $x^3 - 2x^2 - 3x$,
- (b) $x^5 - 1$,
- (c) $3x^2 + 5x - 2$.
- (d) Znajdź punkty przecięcia wykresów funkcji $y = x^3 + x^2 - 2x + 1$ i funkcji $y = x^3$.

Zadanie 5. Funkcje odwrotne. Funkcja $y = x^{1/3}$ jest funkcją odwrotną funkcji $y = x^3$.

- (a) Naskicuj obie funkcje na tym samym wykresie dla $2 < x < 2$ zaznaczając wyraźnie miejsca ich przecięcia.
- (b) Styczna do krzywej $y = x^3$ w punkcie $(1, 1)$ ma nachylenie $m = 3$, podczas gdy styczna do $y = x^{1/3}$ w punkcie $(1, 1)$ ma nachylenie $m = 1/3$. Wyjaśnij związek między dwoma wielkościami.

Zadanie 6. Własności kuli. Objętość V i pole powierzchni S kuli o promieniu r są zadane wzorami:

$$V = \frac{4\pi}{3}r^3, \quad S = 4\pi r^2.$$

Zauważ, że te relacje są wyrażone w kategoriach funkcji potęgowych ze wspólną stałą 4π . Zmienna niezależna to r . Mówimy, że " V jest funkcją r ", a także że " S jest funkcją r ".

- (a) Naskicuj V jako funkcję r oraz S jako funkcję r na tym samym wykresie. Która funkcja rośnie szybciej, gdy r rośnie?
- (b) Jaki jest stosunek objętości do powierzchni; to znaczy $\frac{V}{S}$ w zależności od r ? Naskicuj wykres $\frac{V}{S}$ jako funkcji r .

- (c) Powyższe wzory mówią nam o objętości i powierzchni kuli o danym promieniu. Załóżmy, że znamy jedynie wartość objętości, albo powierzchni i jesteśmy proszeni o znalezienie promienia.
- (d) Wyznacz promień jako funkcję objętości (tj. wyraż r w terminach V).
- (e) Wyznacz promień jako funkcję pola powierzchni.
- (f) Wykorzystaj wyniki, aby znaleźć promień balonu, którego objętość wynosi 1 litr.
- (g) Znajdź promień balonu, którego powierzchnia wynosi 10cm^2 .

Zadanie 7. Rozmiar komórki. Rozważ komórkę w kształcie cienkiego walca o długości L i promieniu podstawy r . Zakładamy, że komórka wchłania składniki odżywcze za pośrednictwem powierzchni z szybkością $k_1 S$ i zużywa składniki odżywcze z szybkością $k_2 V$, gdzie S , V to powierzchnia i objętość cylindra. Tutaj przyjmujemy, że $k_1 = 12\mu\text{M}\mu\text{m}^{-2}$ na minutę i $k_2 = 2\mu\text{M}\mu\text{m}^{-3}$ na minutę.

- (a) Wykorzystaj fakt, że cylinder (bez zaślepek) ma pole powierzchni $S = 2\pi r L$ i objętość $V = \pi r^2 L$, aby określić promień komórki taki, że tempo konsumpcji dokładnie równoważy tempo wchłaniania.
- (b) Czego oczekujesz, w przypadku komórki o większym lub mniejszym rozmiarze promienia?
- (c) Jak długość cylindra wpływa na równowagę składników odżywczych?

Zadanie 8. Relacja allometryczna. Własności zwierząt są często powiązane z ich fizycznym rozmiarem lub masą. Na przykład tempo metabolizmu zwierzęcia (R), a jego tętno (P) może być związane z jego masą ciała m według przybliżonych wzorów $R = Am^b$ i $P = Cm^d$, gdzie A , C , b oraz d są dodatnimi stałymi. Takie relacje nazywane są *relacjami allometrycznymi*.

- (a) Skorzystaj z tych wzorów, aby określić związek pomiędzy metabolizmem i tętnem.
- (b) W podobny sposób można powiązać objętość $V = (4/3)\pi r^3$ i pole powierzchni $S = 4\pi r^2$ kuli. Wyliminuj r i wyznacz odpowiedni związek między objętością a powierzchnią dla kuli.

Zadanie 9. Kinetyka Michaelisa-Mentena. Rozważ kinetykę Michaelisa-Mentena gdzie szybkość reakcji katalizowanej enzymatycznie jest wyrażona wzorem

$$v(x) = Kx/(k_n + x), \quad \text{gdzie } x \text{ oznacza stężenie substratu.}$$

- (a) Wyjaśnij stwierdzenie, że "gdy x jest duże, występuje pozioma asymptota" i znajdź poziom do którego zmierzają wartości $v(x)$, gdy x rośnie.
- (b) Określ prędkość reakcji, gdy $x = k_n$ i wyjaśnij, dlaczego stała k_n jest czasami nazywana stężeniem "półmaksymalnym".

Zadanie 10. Ławica ryb. Według biologa Bredera (C.M. Breder. Structure of a fish school. *Bull. Amer. Mus. Nat. Hist.*, 98:1-27, 1951.)¹, dwie ryby w ławicy wolą trzymać się w określonej odległości od siebie. Breder zasugerował, że ryby, które są oddalone od siebie o x , są przyciągane do siebie siłą $F_A(x) = A/x^a$ i odpychane od siebie przez drugą siłą $F_R(x) = R/x^r$, aby nie zbliżyć się zbyt blisko. Wyznaczył preferowaną odległość odstepu (nazywaną również *odległością indywidualną*) określając wartość x , przy której odpychanie i przyciąganie dokładnie się równoważą. Znajdź indywidualną odległość w kategoriach wielkości A , R , a i r zakładając, że są to dodatnie stałe.

Krzysztof Topolski

¹<http://digitallibrary.amnh.org/bitstream/handle/2246/321/v2/dspace/ingest/pdfSource/bul/B098a01.pdf?sequence=1&isAllowed=y>