

Zadania i problemy do wykładu Matematyka dla specjalności GiBE
(ZESTAW NR 2)

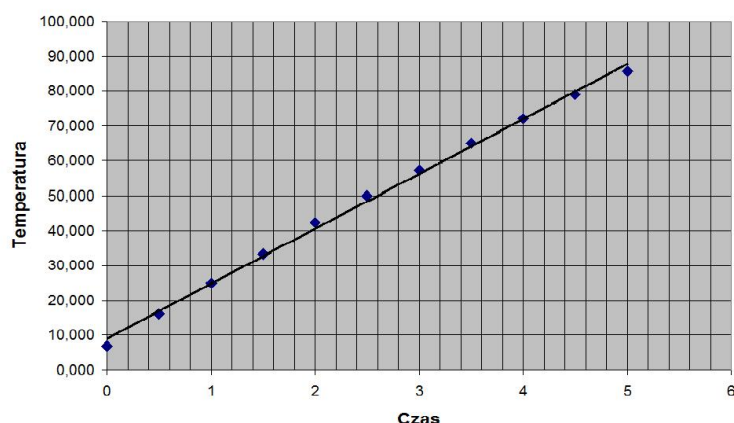
ZADANIA

Zadanie 1. (Podgrzewanie mleka). Rozważ dane zebrane dla podgrzewania mleka w tabeli 1 i rysunek 1.

Tablica 1. Podgrzewanie mleka.

Czas (min)	Temperatura ($^{\circ}C$)
0	6,833
0,5	16,111
1,0	25,000
1,5	33,333
2,0	42,222
2,5	50,000
3,0	57,389
3,5	65,111
4,0	72,167
4,5	79,000
5,0	85,556

Faza podgrzewania mleka.



Rysunek 1: Wykres funkcji temperatury mleka w zależności od czasu.

- (a) Oszacuj nachylenie i punkt przecięcia osi OY dla prostej pokazanej na rysunek i użyj tych informacji, aby napisać równanie tej prostej. Zgodnie z tym przybliżeniem, jaka jest średnia zmiana temperatury w pokazanym przedziale 5 min?
- (b) Znajdź parę punktów taką, że średnia zmiana temperatura jest niższa niż Twój wynik w części (a).
- (c) Znajdź parę punktów taką, że średnia szybkość zmian temperatura jest wyższa niż Twój wynik w części (a).

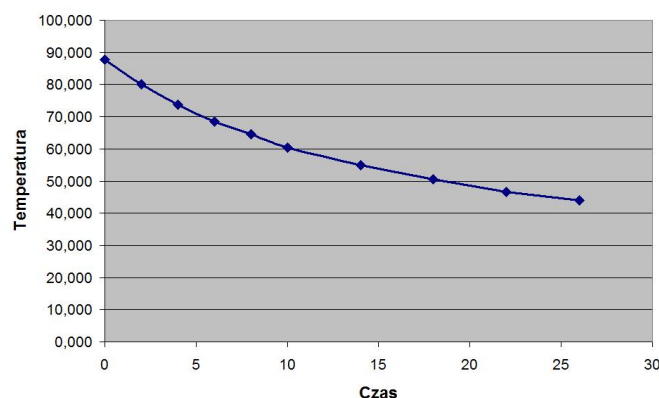
- (d) Mleko gotuje się w temperaturze $100\text{ }^{\circ}\text{C}$, a przepis na jogurt wymaga unikania tak wysokiej temperatury. Wykorzystaj swoją wiedzę, aby wyjaśnić dlaczego dane dotyczące podgrzewania mleka nie są w rzeczywistości liniowe.

Zadanie 2. Tabela 2 przedstawia niektóre dane dotyczące chłodzenia mleka, które zostały wykorzystane do sporządzenia wykresu na rysunku 2.

Tablica 2. Schładzanie mleka.

Czas (min)	Temperatura ($^{\circ}\text{C}$)
0	87,778
2,0	80,000
4,0	73,667
6,0	68,556
8,0	64,444
10,0	60,500
14,0	55,000
18,0	50,556
22,0	46,667
26,0	44,000

Faza stygnięcia mleka.



Rysunek 2: Wykresy funkcji temperatury mleka w zależności od czasu.

Odpowiedzieć na następujące pytania.

- (a) Użyj danych z tabeli, aby określić średnią szybkość zmian temperatury przez pierwsze 10 min.
- (b) Obliczyć średnią szybkość zmian temperatury w przedziałach $0 \leq t \leq 2$, $0 \leq t \leq 1$ i $0 \leq t \leq 0,5$.
- (c) Który z Twoich wyników z punktu (b) byłby najbliższy "chwilowej" szybkość zmian temperatury przy $t = 0$?

Zadanie 3. (Spadająca piłka). Piłka jest upuszczana z wysokości $Y_0 = 490$ metrów powyżej Ziemi. Wiadomo, że jej wysokość, Y , w chwili t jest opisana zależnością

$$Y(t) = Y_0 - \frac{1}{2}gt^2, \quad \text{gdzie } g = 9,8 \text{ m/s}^2.$$

- (a) Znajdź średnią prędkość spadającej piłki pomiędzy $t = 1$ a $t = 2$ sekundy.

- (b) Znajdź średnią prędkość między t a $t + \epsilon$ sekundy, gdzie $0 \leq \epsilon \leq 1$ to niewielki przyrost czasu (zakładamy, że piłka jest ciągle w powietrzu w tym przedziale czasowym).
- (c) Określenie czasu, w którym piłka uderza o ziemię.

Zadanie 4. (Średnia prędkość tuńczyka). Znajdź średnią prędkość Tuńczyka numer 1 na każdym z przedziałów czasowych podanych w tabeli 3, czyli dla $0 \leq t \leq 5$, $5 \leq t \leq 10$ itp.

Tablica 3. Dane dotyczące obserwacji tuńczyka błękitnopłetwego.

Czas (godziny)	Odległość Tuńczyka 1 (km)	Odległość Tuńczyka 2 (km)
0	0	0
5	29	32
10	51	55
15	78	80
20	140	111
25	160	125
30	182	150
35	180	180

Zadanie 5. (Wzrost populacji ludzkiej). Tabela 4 zawiera dane dla populacji ludzkiej (w miliardach) w zarejestrowanej historii (z niektórymi szacunkami gdy dane nie były bezpośrednio dostępne).

Tablica 6. Dane dotyczące liczebności populacji ludzkiej od AD 1 do AD 2020.

Rok	Populacja w (miliardach)
1	0,20
1000	0,28
1500	0,45
1650	0,50
1750	0,70
1804	1,00
1850	1,20
1900	1,60
1927	2,00
1950	2,55
1960	3,00
1980	4,50
1987	5,00
1999	6,00
2011	7,00
2020	7,70

- (a) Wykreśl liczebność populacji ludzkiej (w miliardach) w funkcji czasu (w latach) przy użyciu wybranego oprogramowania graficznego.
- (b) Określić średnie tempo zmian liczebności populacji ludzkiej w kolejnych przedziałach czasu.
- (c) Wykreśl średnie tempo zmian w funkcji czasu (w latach) i określ w jakim przedziale czasu to średnie tempo zmian było największe.
- (d) W jakim okresie (tj. przedziale czasu) populacja rosła najszybciej?

Zadanie 6. (Średnia prędkość w chwili t). Piłka jest wyrzucana ze szczytu budynku o wysokości Y_0 . Wysokość piłki w czasie t jest podana przez

$$Y(t) = Y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2,$$

gdzie Y_0 , v_0 i g są dodatnimi stałymi. Znajdź średnią prędkość piłki dla przedziału czasu $0 \leq t \leq 1$ przy założeniu, że znajduje się w powietrzu podczas całego czasu w tym przedziale. Przetwórz swoją odpowiedź w terminach stałych modelu.

Zadanie 7. (Średnia szybkość zmian). Pewna funkcja przyjmuje wartości podane w Tabeli 5.

Tablica 5. Wartości funkcji.

t	0	0.5	1.0	1.5	2.0
$f(t)$	0	1	0	-1	0

Znajdź średnią szybkość zmian funkcji w następujących przedziałach czasu.

- (a) $0 \leq t \leq 0.5$,
- (b) $0 \leq t \leq 1.0$,
- (c) $0.5 \leq t \leq 1.5$,
- (d) $1.0 \leq t \leq 2.0$.

Zadanie 8. (Średnia szybkość zmian). Znajdź średnią szybkość zmian dla każdej z następujących funkcji w zadanym przedziale.

- (a) $y = f(x) = 3x - 2$, od $x = 3,3$ do $x = 3,5$.
- (b) $y = f(x) = x^2 + 4x$, na przedziale $[0, 7, 0, 85]$.
- (c) $y = -\frac{4}{x}$, gdy x zmienia się od 0,75 do 0,5.

Zadanie 9. (Sieczne i styczne). Niech $y = f(x) = 1 + x^2$. Rozważmy punkt $(1, 2)$ na wykresie tej funkcji oraz jakiś punkt w jego pobliżu, na przykład punkt $(1 + h, 1 + (1 + h)^2)$.

- (a) Znajdź nachylenie siecznej łączącej te dwa punkty.
- (b) Nachylenie stycznej do wykresu funkcji $y = f(x)$, w punkcie x jest równe pochodnej $f'(x)$. Posługując się nachyleniem obliczonym w punkcie (a), określ, jakie będzie nachylenie stycznej do krzywej w punkcie $(1, 2)$.
- (c) Znajdź równanie stycznej przechodzącej przez punkt $(1, 2)$.

Zadanie 10. (Sieczne i styczne). Biorąc pod uwagę funkcję $y = f(x) = 2x^3 + x^2 - 4$,

- (a) znajdź nachylenie siecznej łączącej punkty $(4, f(4))$ i $(4 + h, f(4 + h))$ na wykresie tej funkcji, gdzie h jest małą liczbą dodatnią,
- (b) znajdź nachylenie stycznej do krzywej w punkcie $(4, f(4))$.

Zadanie 11. (Średnia szybkość zmian). Rozważmy funkcję $f(x) = x^2 - 4x$ i punkt $x_0 = 1$.

- (a) Naskicuj wykres funkcji f .
- (b) Znajdź średnią szybkość zmian w przedziałach $[1, 3]$, $[-1, 1]$, $[1, 1.1]$, $[0.9, 1]$ i $[1 - h, 1]$, gdzie h jest małą dodatnią liczbą.
- (c) Znajdź $f'(1)$.

Zadanie 12. (Aproksymacja za pomocą stycznej). Niech $y = f(x) = x^2 - 2x + 3$.

- (a) Znajdź średnią szybkość zmian w przedziale $[2, 2 + h]$.
- (b) Znajdź $f'(2)$.
- (c) Wykorzystując tylko informacje z punktów (a) i (b) oraz fakt, że $f(2) = 3$, wyznacz przybliżoną wartość y , gdy $x = 1,99$, bez obliczania wartości funkcji f w punkcie $x = 1,99$.

Zadanie 13. (Średnia szybkość zmian). W podanych przykładach podaj odpowiedź w terminach pierwiastków kwadratowych i liczby π . Nie obliczaj wyrażeń. Zwróć uwagę, że

$$\operatorname{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \quad \operatorname{ctg}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

- (a) Znajdź średnią szybkość zmian $\operatorname{tg}(x)$ w przedziale $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$.
- (a) Znajdź średnią szybkość zmian $\operatorname{ctg}(x)$ w przedziale $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$.

Zadanie 14. (Sieczne i styczne).

- (a) Znajdź nachylenie siecznej wykresu funkcji $y = \frac{2}{x}$ między punktami $x = 1$ i $x = 2$.
- (b) Znajdź średnią szybkość zmian y między $x = 1$ i $x = 1 + \epsilon$, gdzie $\epsilon > 0$ to pewna dodatnia stała.
- (c) Co dzieje się gdy $\epsilon \rightarrow 0$?
- (d) Znajdź równanie stycznej do krzywej $y = \frac{2}{x}$ w punkcie $x = 1$.

Zadanie 15. (Prędkość i średnia prędkość). Dla każdego z poniższych ruchów, gdzie s jest mierzone w metrach, a t jest mierzone w sekundach, znajdź prędkość w chwili $t = 2$ i średnią prędkość w zadanym przedziale.

- (a) $s(t) = 3t^2 + 5$ i t zmienia się od 2 do 3.
- (b) $s(t) = t^3 - 3t^2$ i $t \in [3, 5]$.
- (c) $s(t) = 2t^2 + 5t - 3$ i $t \in [1, 2]$.

Zadanie 16. (Przyspieszenie). Prędkość w chwili t , $v(t)$, obiektu przymocowanego do sprężyny jest zadana wzorem $v = -A\varpi \sin(\varpi t + \delta)$, gdzie A , ϖ oraz δ są stałymi. Wyznacz średnią zmianę prędkości ("przyspieszenia") obiektu dla $t \in [0, \frac{2\pi}{\varpi}]$.

Zadanie 17. (Definicja pochodnej). Korzystając z definicji pochodnej, oblicz pochodną funkcji

$$f(x) = \frac{1}{x+1}.$$