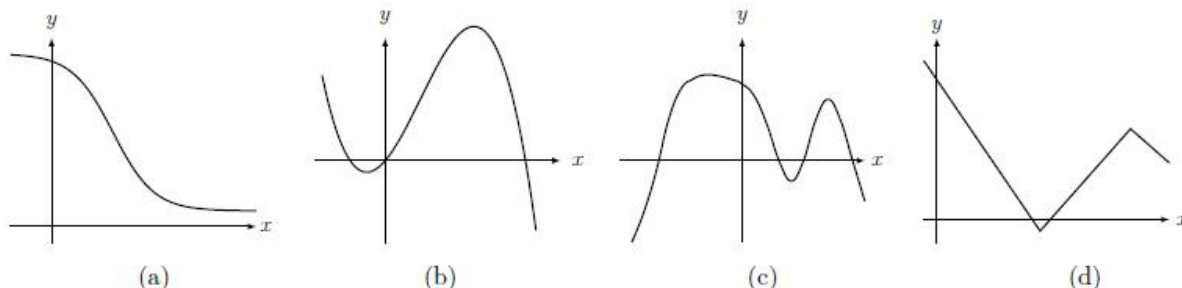


Zadania i problemy do wykładu Matematyka dla specjalności GiBE
(ZESTAW NR 3)

ZADANIA

Zadanie 1. (Szkicowanie pochodnej). Na rysunku 1 pokazane są cztery funkcje. Korzystając z podejścia geometrycznego do pojęcia pochodnej wyznacz najpierw nachylenie stycznych do wykresu funkcji w kilku wybranych punktach a następnie naszkicuj pochodną każdej z tych funkcji.



Rysunek 1: Rysunek do zadania nr 1; wykresy cztery różne funkcje. .

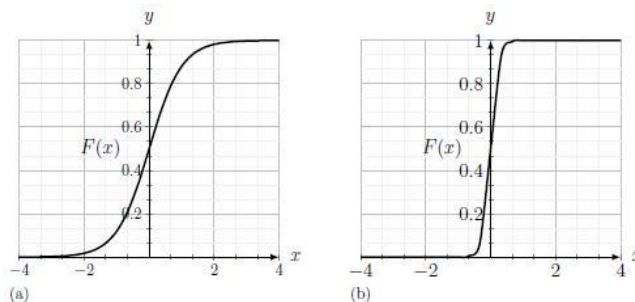
Zadanie 2. (Szkicowanie funkcji na podstawie jej pochodnej). Biorąc pod uwagę informacje w tabeli 1 o wartościach pochodnej funkcji, $g(x)$, naszkicuj (bardzo przybliżony) wykres funkcji dla $-3 \leq x \leq 3$.

Tablica 1.

x	$g'(x)$	$f'(x)$
-3	-1	0
-2	0	+
-1	2	0
0	1	-
1	0	0
2	-1	+
3	-2	0

Zadanie 3. (Co mówi nam znak pochodnej?) Biorąc pod uwagę informacje o znaku pochodnej funkcji, $f(x)$ w tabeli 1, naszkicuj (bardzo przybliżony) wykres funkcji dla $-3 \leq x \leq 3$.

Zadanie 4. Na rysunku 2 pokazane są wykresy dwóch podobnych funkcji, obie rosnące od 0 do 1, ale z różnymi szybkościami.

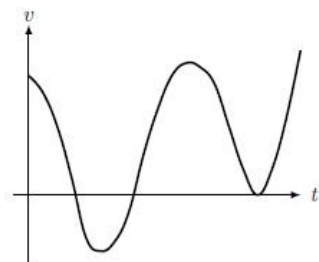


Rysunek 2: Rysunek do zadania 4; dwie podobne funkcje rosnące w różnym tempie.

Naszkicuj pochodne każdej z nich. Następnie skomentuj, jak wyglądałby twój szkic dla nieciągłej funkcji, zdefiniowanej w następujący sposób:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

Zadanie 5. (Wprowadzenie do prędkości i przyspieszenia). Przyspieszenie poruszającego ciała jest pochodną jej prędkości. Na rysunku 3 pokazano wykres prędkości ciała poruszającego się w jednym ustalonym kierunku.



Rysunek 3: Rysunek do zadania 5; prędkość ciała poruszającego się w jednym kierunku.

Wskaż na wykresie momenty, w których ciało poruszało się z przyspieszeniem równym zero.

Zadanie 6. (Prędkość, ciąg dalszy). Wysokość piłki w pionie, d (w metrach) po upływie t (w sekundach) po tym, jak została wyrzucona w górę, opisana jest przez pierwsze 3 sekundy ruchu, funkcją

$$d(t) = 14,7t - 4,9t^2.$$

- (a) Jaka jest prędkość początkowa piłki (tj. prędkość chwilowa przy $t = 0$)?
- (b) Jaka jest chwilowa prędkość piłki w chwili $t = 2$?

Zadanie 7. (Obliczanie z definicji pochodnej pierwiastka kwadratowego). Rozważ funkcję

$$f(x) = \sqrt{x}.$$

- (a) Korzystając z definicji pochodnej oblicz $f'(x)$. Skorzystaj ze wzoru:

$$\frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})} = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}.$$

- (b) Znajdź nachylenie stycznej w punkcie $x = 4$.
- (c) Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x)$ w punkcie $x = 4$.

Zadanie 8. (Obliczanie pochodnej). Korzystając z definicji pochodnej wyznacz pochodną funkcji

$$f(x) = \frac{C}{(x + a)},$$

gdzie C i a są dowolnymi stałymi. Pokaż, że Twój wynik to

$$f'(x) = -\frac{C}{(x + a)^2}.$$

Zadanie 9. (Obliczanie pochodnej). Rozważ funkcję

$$f(x) = \frac{x}{(x + a)}.$$

- (a) Pokaż, że tę funkcję można zapisać jako

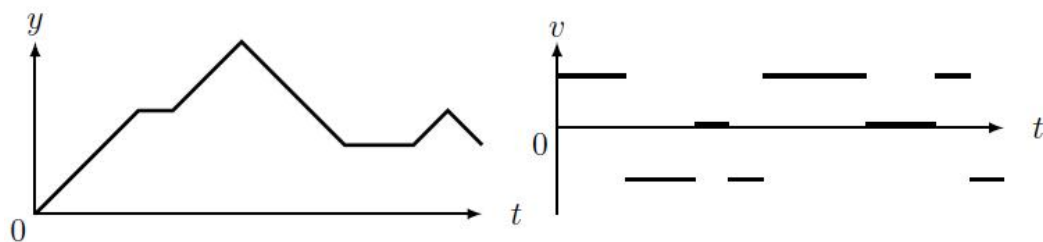
$$f(x) = 1 - \frac{a}{(x + a)}.$$

- (b) Wykorzystaj wyniki zadania 5, aby określić pochodną tej funkcji (nie musisz używać definicji pochodnej do wykonania tego obliczenia). Pokaż, że

$$f'(x) = \frac{a}{(x + a)^2}.$$

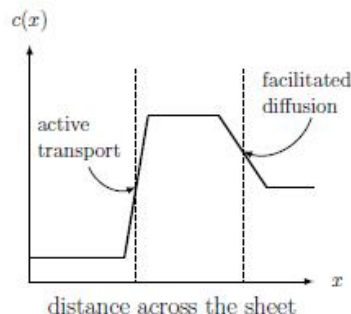
Zadanie 10. (Silniki molekularne).

- (a) Rysunek 4(a) przedstawia przemieszczenie pęcherzyka przenoszonego przez silnik molekularny. Silnik może poruszać się w prawo (P), w lewo (L) wzdłuż jednej z mikrotubul lub może odłączyć się (O) i pozostawać nieruchomo, następnie ponownie połączyć się z mikrotubulą. Naskicuj zgrubny wykres prędkości z jaką przenoszony jest pęcherzyk, $v(t)$, i opisz (używając liter P, L, O) sekwencję zachodzących podczas ruchu zdarzeń.
- (b) Rysunek 4(b) przedstawia prędkość, $v(t)$, z jaką przenoszony jest inny pęcherzyk. Naskicuj zgrubny wykres jego przemieszczenia zaczynając od $y(0) = 0$.



Rysunek 4: Rysunek do zadania 10.

Zadanie 11. (Gradient stężenia). Niektóre rodzaje tkanek - nabłonek - są zbudowane z cienkich warstw komórek. Substancje są pobierane z jednej strony tych warstw przez jakiś aktywny mechanizm transportowy, a następnie dyfundują w kierunku zmniejszającego się gradientu stężenia za pomocą mechanizmu zwanego ułatwioną dyfuzją po przeciwnej stronie tych warstw. Na rysunku 5 przedstawiono profil stężenia $c(x)$ pewnej substancji w poprzek szerokości warstw (x oznacza odległość). Naskicuj odpowiedni gradient stężenia, tj. szkic $c'(x)$, pochodną koncentracji jako funkcji x .



Rysunek 5: Rysunek do zadania 11: profil stężenia substancji.

Zadanie 12. (Styczna do prostej funkcji). Jakie jest nachylenie stycznej do funkcji

$$f(x) = 5x + 2,$$

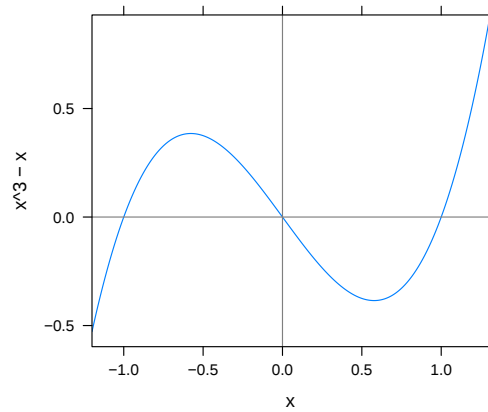
gdy $x = 2$ oraz gdy $x = 4$? W jaki sposób zmieniłoby się nachylenie, gdyby x przyjmuje wartość ujemną?

Zadanie 13. (Nachylenie stycznej). Korzystając ze związku pochodnej ze styczną obliczyć nachylenie stycznej do wykresu funkcji

$$y = 3t^2 - t + 2,$$

w punkcie $t = 1$.

Zadanie 14. (Prosta styczna). Wyznacz równanie stycznej w punkcie $x = 1,5$ do wykresu funkcji $f(x) = x^3 - x$ pokazanej na rysunku 6. Możesz wykorzystać fakt, że linia styczna przechodzi punkt styczności, jak również przez punkt $(1, 7, 1, 47)$.



Rysunek 6: Rysunek do zadania 14: profil stężenia substancji.