

Zadania i problemy do wykładu Matematyka dla specjalności GiBE
(ZESTAW NR 4)

ZADANIA

Zadanie 1. (Pierwsze pochodne). Wyznacz pierwszą pochodną dla każdej z poniższych funkcji.

(a) $f(x) = (2x^2 - 3x)(6x + 5),$

(b) $f(x) = (x^3 + 1)(1 - 3x),$

(c) $g(x) = (x - 8)(x^2 + 1)(x + 2),$

(d) $f(x) = (x - 1)(x^2 + x + 1),$

(e) $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 + 9},$

(f) $f(x) = \frac{2 - x^3}{1 - 3x},$

(g) $f(b) = \frac{b^3}{2 - b^{2/3}},$

(h) $f(m) = \frac{m^2}{3m - 1} - (m - 2)(2m - 1),$

(i) $f(x) = \frac{(x^2 + 1)(x^2 - 2)}{3x + 2}.$

Zadanie 2. (Tempo wzrostu logistycznego). W rozwoju logistycznym tempo wzrostu populacji, R zależy od wielkości populacji N w następujący sposób:

$$R = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right),$$

gdzie r i K są dodatnimi stałymi. Znajdź tempo zmian wzrostu populacji w odniesieniu do wielkości populacji, to znaczy oblicz dR/dN .

Zadanie 3. (Objętość, pole powierzchni i promień kuli). Objętość i pole powierzchni kuli zależy od jej promienia:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3, \quad S = 4\pi r^2.$$

(a) Znajdź szybkość zmian objętości w odniesieniu do promienia i szybkość zmiany pola powierzchni w odniesieniu do promienia.

(b) Znajdź szybkość zmiany stosunku powierzchni do objętości S/V w stosunku do promienia.

Zadanie 4. (Pochodna objętości w odniesieniu do powierzchni). Rozważamy objętość i pole powierzchni kuli.

- (a) Wyeliminować promień i wyrazić V jako funkcję S .
- (b) Znajdź tempo zmian objętości w odniesieniu do powierzchni.

Zadanie 5. (Rosnąca kolonia kolista). Kolonia bakterii ma kształt koła o promieniu $r(t) = 2 + t/2$, gdzie t jest czasem w godzinach i r jest w milimetrach. Wyraż powierzchnię kolonii jako funkcję czasu a następnie określ tempo zmian obszaru w chwili $t = 2$.

Zadanie 6. (Szybkość zmian energii podczas żerowania). Kiedy pszczoła szuka nektaru w kępie kwiatów, nabiera energii. Załóżmy, że ilość energii uzyskanej podczas żerowania przez czas t wynosi

$$f(t) = \frac{Et}{k+t}, \quad \text{gdzie } E, k > 0 \text{ są stałymi.}$$

- (a) Jeśli pszczoła pozostaje w kępie kwiatów przez bardzo długi czas, ile energii może zyskać?
- (b) Użyj reguły ilorazu, aby obliczyć tempo przyrostu energii podczas żerowania w kępie kwiatów.

Zadanie 7. (Stosunek liczebności dwóch gatunków). W pewnym jeziorze, zmiany liczebności populacji dwóch żyjących tam gatunków są proporcjonalne do ich liczebności. Tak więc jeśli $N_1(t)$ i $N_2(t)$ opisują odpowiednio liczebności pierwszej i drugiej populacji w chwili t to

$$\frac{dN_1}{dt} = k_1 N_1, \quad \frac{dN_2}{dt} = k_2 N_2,$$

gdzie k_1 i k_2 są stałymi. Znajdź tempo zmiany, stosunku ich liczebności (N_1/N_2), w czasie $\frac{d(N_1/N_2)}{dt}$. Odpowiedź powinna być wyrażona w terminach k_1 , k_2 oraz N_1/N_2 .

Zadanie 8. (Gatunki inwazyjne i zrównoważony rozwój). Gatunek inwazyjny to taki, który może konkurować i rosnąć szybciej niż gatunki rodzime i w efekcie wypiera je z ekosystemu i go przejmuję. Weź pod uwagę system dwóch gatunków żyjących w tym samym jeziorze z poprzedniego zadania. Załóżmy, że początkowo stosunek liczebności N_1 rodzimego gatunku to liczebności gatunku inwazyjnego N_2 jest bardzo duży. Przy jakich warunkach na stałe k_1 , i k_2 stosunek ten będzie się zmieszał wraz z upływem czasu tj. czy gatunek inwazyjny przejmie kontrolę nad ekosystemem jeziora?

Zadanie 9. (Różniczkowanie numeryczne). Rozważ funkcję

$$y(x) = 5x^3, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

- (a) Użyj arkusza kalkulacyjnego (lub swojego ulubionego oprogramowania), aby obliczyć przybliżenie pochodnej tej funkcji na zadanym przedziale dla $\Delta x = 0,25$ i porównaj otrzymany wynik z prawdziwą pochodną. Skomentuj wynik.
- (b) Ponownie obliczyć przybliżenie pochodnej ale tym razem przy użyciu $\Delta x = 0,05$. Skomentuj otrzymane w obu punktach przybliżenia.

Zadanie 10. (Funkcje pierwotne). Znajdź funkcje pierwotne następujących funkcji, czyli znaleźć postać funkcji $y(t)$.

(a) $y'(t) = t^4 + 3t^2 - t + 3$.

(b) $y'(x) = -x + \sqrt{2}$.

(c) $y'(x) = |x|$

Zadanie 11. (Ruch cząstki). Prędkość poruszającej się cząstki jest opisana funkcją

$$v(t) = A - Bt^2, \quad \text{gdzie } A, B > 0 \quad \text{są stałymi.}$$

(a) Wyznacz przyspieszenie $a(t)$.

(b) Załóżmy, że początkowa pozycja cząstki to $y(0) = 0$. Oblicz pozycje cząstki w chwili t .

(c) Po jakim czasie cząstka powróci do położenia początkowego?

(d) W jakim momencie cząstka jest najbardziej oddalona od położenia początkowego?

(e) Jaka jest największa prędkość cząstki?

Zadanie 12. (Piłka wyrzucona z wieży). Z wieży o wysokości h_0 wyrzucana jest piłka. Piłka spadając swobodnie w polu grawitacyjnym Ziemi znajduje się w chwili t na wysokości równej

$$h(t) = h_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

Zakładamy, że h_0, v_0 , są dodatnimi stałymi a g oznacza przyspieszenia ziemskie.

(a) Kiedy piłka osiąga najwyższy punkt?

(b) Jak wysoko jest w tym momencie?

(c) Jaka jest chwilowa prędkość piłki w jej najwyższym punkcie?

PROBLEMY Z WYKŁADU

Problem 1. (Dynamika aktyny w komórce).

Aktyna jest białkiem strukturalnym, które tworzy długie włókna i sieci w żywych komórkach. Sieć aktynowa jest nieustannie formowana przez łączenie małych komponentów (monomerów aktyny) i demontowana ponownie. Aby zbadać ten proces, naukowcy dołączają fluorescencyjne markery do aktyny i obserwują, jak intensywność fluorescencji zmienia się w czasie. W w jednym eksperymencie zastosowano zarówno czerwone, jak i zielone znaczniki fluorescencyjne. Zielony znacznik fluoryzuje dopiero po aktywacji impulsem światła, natomiast czerwony znacznik jest stale aktywny. Stwierdzono, że intensywności czerwonej i zielonej fluorescencji (R , G) spełniają następujący związek:

$$\frac{dR}{dt} = (a - b)R, \quad \frac{dG}{dt} = -bG,$$

gdzie a, b są stałymi, które charakteryzują szybkość montażu i demontażu ("rozpadu") aktyny. Pokaż, że pochodna, $\frac{d[\frac{R}{G}]}{dt}$, może być wyrażona w terminach stosunku $\frac{R}{G}$.

Problem 2. (Pochodna funkcji Bevertona-Holta). Model Bevertona-Holta dla wzrostu populacji ryb został omówiony w jednym z poprzednich wykładów. Funkcja ta wiąże wielkość populacji ryb w obecnym roku, y , do wielkości populacji ryb w roku poprzednim, x , i ma postać

$$y = f(x) = k_1 \frac{x}{(1 + kx^2)}$$

(gdzie uprościliśmy zapis, przyjmując, $x = N_0$, $y = N_1$). Jak wrażliwa jest tegoroczna populacja na niewielkie zmiany w liczebności zeszłorocznej populacji? Oblicz pochodną dy/dx , aby odpowiedzieć na to pytanie.

Problem 3. (Jak prześcignąć geparda).¹

Gepard, może pobiec z dużą szybkością maksymalną v_c , ale musi zwolnić po pewnym czasie biegu z maksymalną szybkością, aby przegrzania organizmu. Załóżmy, że gepard biegnie z swoją maksymalną szybkością w momencie gdy dzieli go odległość d od uciekającej gazeli zaczyna zwalniać i zaczyna poruszać się ruchem jednostajnie opóźnionym z przyspieszeniem równym $a = -a_c$. Gazela porusza się z mniejszą szybkością niż gepard, v_g , ale jest w stanie utrzymać tę szybkość przez znacznie dłuższy czas.

- (a) Kiedy gepard dogoni gazelę?
- (b) Czy jest taka odległość, d_{min} , dzieląca zwalniającego geparda i uciekającą gazelę przy której gazela nie zostanie złapana?

Zakładamy, że gepard jest w stanie biec z maksymalną szybkością przez czas t_c zanim zacznie zwalniać, a gazela zaczyna uciekać w momencie kiedy gepard podejmuje pościg.

- (c) Oblicz w jakiej minimalnej odległości od podejmującego pościg geparda może się znajdować gazela i być w stanie uciec gepardowi.

Krzysztof Topolski

¹Ilustrację strategii polowania geparda oraz reakcja gazeli na pościg ilustruje fragment filmu <https://youtu.be/5hwkdbdUijg?t=76>