

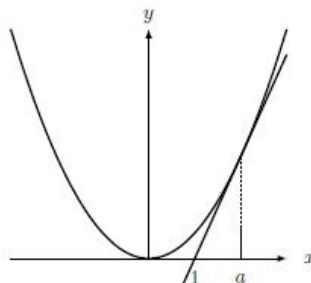
Zadania i problemy do wykładu Matematyka dla specjalności GiBE
(ZESTAW NR 5)

ZADANIA

Zadanie 1. (Równanie stycznej). Funkcja $f(x)$ spełnia warunki $f(1) = -1$ oraz $f'(1) = 2$. Jakie jest równanie stycznej do $f(x)$ w punkcie $x = 1$?

Zadanie 2. (Punkt styczności). Na rysunku 1 pokazano wykres funkcji $f(x) = x^2$ z jedną z prostych stycznych.

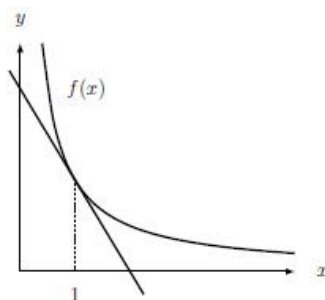
- (a) Pokaż, że nachylenie stycznej do krzywej $y = x^2$ w punkcie $x = a$ to $2a$.
- (b) Załóżmy, że styczna przecina oś OX w punkcie $(1, 0)$. Wyznacz współrzędne punktu styczności.



Rysunek 1: Rysunek do zadania 1; krzywa $y = x^2$ i punkt styczności.

Zadanie 3. (Aproksymacja prostą styczną). Na rysunku 2 pokazano wykres funkcji $f(x) = 1/x^4$ wraz z prostą styczną w punkcie $x = 1$.

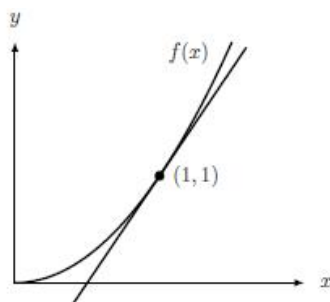
- (a) Wyznacz równanie stycznej.
- (b) Wyznacz punkty przecięcia stycznej z osiami OX i OY.
- (c) Użyj stycznej, aby uzyskać liniowe przybliżenie wartości $f(1, 1)$. Czy to przybliżenie zaniża czy zawyża rzeczywistą wartość funkcji dla $x = 1, 1$?



Rysunek 2: Rysunek do zadania 3; wykres funkcji $f(x) = 1/x^4$ i punkt styczności.

Zadanie 4. (Przybliżenie liniowe). Na rysunku 3 pokazano wykres funkcji $f(x) = x^3$ wraz ze styczną do wykresu w punkcie o współrzędnych $(1, 1)$.

- (a) Wyznacz równanie stycznej.
- (b) Określ punkt, w którym styczna przecina oś OX.
- (c) Oblicz wartość funkcji dla $x = 1,1$. Porównaj tę wartość z wartością y na stycznej w punkcie $x = 1,1$.



Rysunek 3: Rysunek do zadania 4; wykres funkcji $f(x) = x^3$ i punkt styczności.

Ta ostatnia wartość jest wartością liniowego przybliżenia wartości funkcji $f(x)$ w punkcie $x = 1,1$ otrzymaną na podstawie znanej wartości funkcji w punkcie $x = 1$ oraz wartości pochodnej w tym punkcie.

Zadanie 5. (Szacowanie pierwiastka kwadratowego). Użyj metody Newtona, aby znaleźć przybliżoną wartość $\sqrt{8}$.

Wskazówka: Najpierw pomyśl o funkcji, $f(x)$, która ma miejsce zerowe w punkcie $x = \sqrt{8}$

Zadanie 6. (Wyznaczanie punktów przecięcia). Wyznacz punkty przecięcia wykresów funkcji $y_1 = 8x^3 - 10x^2 + x + 2$ oraz $y_2 = x^3 + 15x^2 - x - 4$.

Wskazówka: Punkt przecięcia istnieje między $x = 3$ a $x = 4$.

Zadanie 7. (Pierwiastki równań sześciennych). Wyznacz metodą Newtona przybliżone wartości pierwiastków każdego z poniższych równań sześciennych:

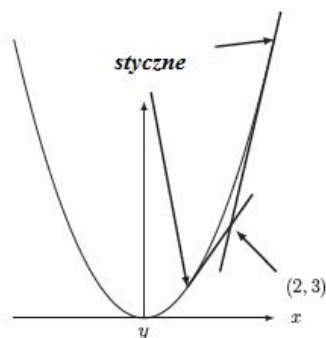
- (a) $x^3 + 3x - 1 = 0$,
- (b) $x^3 + x^2 + x - 2 = 0$,
- (c) $x^3 + 5x^2 - 2 = 0$.

Wskazówka: Korzystając z metody Newtona wyznacz przybliżoną wartość, a , jednego z pierwiastków, a następnie podziel lewą stronę równania przez jednomian $(x - a)$, aby otrzymać równanie kwadratowe, które można rozwiązać algebraicznie.

Zadanie 8. (Metoda Newtona). Użyj metody Newtona, aby znaleźć przybliżenie dziesiętne wartości $\sqrt{105}$ z dokładnością do 16 miejsc po przecinku.

Zadanie 9. (Przecinające się styczne). Dla paraboli $y = x^2$ narysowano dwie proste styczne, o których wiadomo, że przecinają się w punkcie o współrzędnych $(2, 3)$. Znajdź współrzędne dwóch punktów, w których te proste są styczne do paraboli.

Uwaga: Zwróć uwagę na fakt, że punkt $(2, 3)$ nie należy do paraboli.



Rysunek 4: Rysunek do zadania 8; wykres paraboli $y = x^2$ wraz z dwoma stycznymi przecinającymi się w punkcie o współrzędnych $(2, 3)$.

Zadanie 10. (Użycie metody Newtona do wyznaczania punktu krytycznego). Rozważ funkcję

$$g(x) = x^5 - 4x^4 + 3x^3 + x^2 - 3x.$$

Punkty krytyczne funkcji definiujemy jako wartości argumentu funkcji x , dla których

$$g'(x) = 0.$$

Jednak dla rozważanego w treści zadania wielomianu, stopnia piątego wyznaczenie punktów krytycznych w sposób analityczny nie jest łatwe.

- (a) Użyj metody Newtona, aby znaleźć punkt krytyczny dla dodatnich wartości x . W tym celu wyznacz początkowe przybliżenie punktu krytycznego, na podstawie wykresu, a następnie korzystając z arkusza kalkulacyjnego lub swojego ulubionego programu komputerowego przeprowadź stosowne obliczenia i podaj odpowiedź z dokładnością do 8 miejsc po przecinku.
- (b) Wyjaśnij, dlaczego wybór początkowej wartości $x_0 = 1$ w metodzie Newtona nie prowadzi do punktu krytycznego o dodatniej wartości. Możesz poprzeć swoje argumenty odpowiednim wykresem.

Uwaga: W jednym z dalszych wykładów przyjrzymy się punktom krytycznym bardziej wnikliwie.