

Zadania i problemy do wykładu Matematyka dla specjalności GiBE
(ZESTAW NR 6)

ZADANIA

Zadanie 1. (Różniczkowanie funkcji złożonej). Wyznacz pochodne następujących funkcji:

- (a) $y = f(x) = (x + 5)^5$,
- (b) $y = f(x) = 4(x^2 + 5x - 1)^8$,
- (c) $y = f(x) = (\sqrt{x} + 2x)^3$.

Zadanie 2. (Wzrost komórki). Rozważ wzrost komórki kulistego kształtu. Zakładamy, że promień komórki stale rośnie z szybkością $k > 0$ na jednostkę czasu.

- (a) W jakim tempie zwiększa się objętość komórki V ?
- ((b) W jakim tempie zwiększa się powierzchnia S ?
- (c) W jakim tempie zmienia się stosunek pola powierzchni do objętości S/V ?
- (d) Czy stosunek S/V wzrośnie czy zmniejszy się w miarę wzrostu komórki?

Zadanie 3. (Wzrost okrągłej kolonii grzybów). Kolonia grzybów, zaczynająca się od pojedynczego zarodnika, rośnie na płaskiej powierzchni. Kształt krawędzi kolonii jest okrągły, a początkowe miejsce zarodnika znajduje się w środku koła. Załóżmy, że promień kolonii rośnie ze stałą szybkością C na jednostkę czasu.

- (a) W jakim tempie zmienia się obszar zajmowany przez kolonię?
- (b) Biomasa kolonii jest proporcjonalna do zajmowanego przez nią obszaru. Niech a będzie czynnikiem proporcjonalności. W jakim tempie rośnie biomasa?

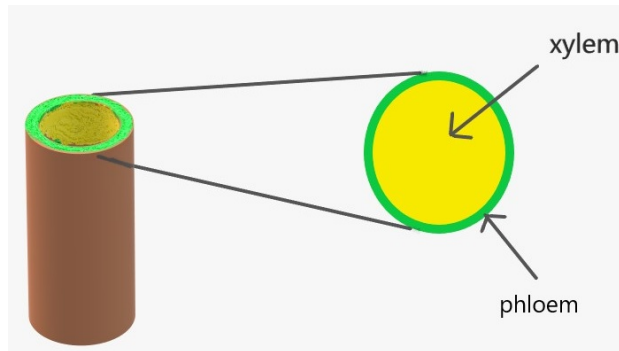
Zadanie 4. (Prawo Boyle’a). W chemii prawo Boyle’a opisuje zachowanie gazu doskonałego. Prawo to wiąże objętość V zajmowaną przez gaz, z jego temperaturą T i ciśnieniem P , w następujący sposób:

$$PV = nRT,$$

gdzie n , R są dodatnimi stałymi.

- (a) Załóżmy, że ciśnienie jest utrzymywane na stałym poziomie, umożliwiając gazowi rozszerzanie się wraz ze wzrostem jego temperatury. Określ tempo zmian objętości w stosunku do szybkości zmiany temperatury.
- (b) Załóżmy, że temperatura jest stała, a ciśnienie jest stopniowo zmniejszane. Powiązać tempo zmian objętości z szybkością zmiany ciśnienia.

Zadanie 5. (Wzrost pnia drzewa). Rozważmy cylindryczny pień drzewa o promieniu R . Żywe komórki zajmują tylko cieką powłokę, grubości d , zaraz za korą drzewa. Wnętrze pnia składa się z martwych komórek, które zamieniły się w drewno.

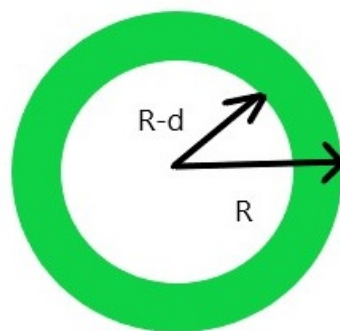


Rysunek 1: Cienka skorupa żywej tkanki (łyko) otacza martwą drewnianą część pnia drzewa (ksylem). Ułamek F z żywa tkanka zmienia się wraz ze wzrostem drzewa.

- Jaki ułamek, F , objętości pnia stanowi żywa tkanka?
- Jak zmienia się ułamek F wraz z rozwojem drzewa? Zakładamy, że promień pnia rośnie w stałym tempie, a grubość d żywej tkanki nie zmienia się?
- Oblicz szybkość zmiany F w chwili, gdy promień jest 5 razy większy od grubości d .

Wskazówka.

- Założ, że drewniane wnętrze jest cylindryczne, podobnie jak pień. Wyznacz objętość powłoki żywej tkanki poprzez odjęcie objętości tych dwóch cylindrów i wyznacz F .
- Oblicz pochodną dF/dt . Zanim zaczniesz obliczyć pochodną pamiętaj aby najpierw uprościć różniczkowane wyrażenie.



Rysunek 2: Promień pnia to R natomiast grubość łyka (żywa część pnia) jest równa d . Zakładamy cylindryczną geometrię pnia. F = ułamek objętości cienkiego fragmentu pnia, cylindryczna powłoka zaznaczona kolorem zielonym.

Zadanie 6. (Rozwój kończyny). Podczas wczesnego rozwoju kończyna płodu zwiększa swój rozmiar, ale zachowuje swoje proporcje. Załóżmy, że kończyna jest w przybliżeniu okrągłym walcem o promieniu podstawy r i długości l i proporcji

$$\frac{l}{r} = C,$$

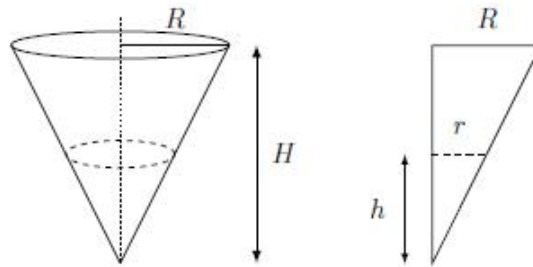
gdzie C jest dodatnią stałą. Należy zauważyć, że w początkowej fazie wzrostu, promień rośnie w przybliżeniu ze stałą szybkością, tj.

$$\frac{dr}{dt} = a.$$

W jakim tempie zmienia się w tym czasie masa kończyny?

Uwaga. Przyjmij, że gęstość kończyny wynosi $1 [g/cm^3]$.

Zadanie 7. (Zbiornik w kształcie stożka I). Woda wycieka ze stałą prędkością ze zbiornika w kształcie odwróconego stożka o wysokości H i promieniu podstawy R .



Rysunek 3: Geometria stożkowego zbiornika o (stałej) wysokości H i (stałym) promieniu R . Powierzchnia wody jest oznaczona linią przerywaną. Woda zajmuje objętość stożka o wysokości $h(t)$ i promieniu $r(t)$. Obie te wielkości maleją, gdy wycieka ze zbiornika woda.

Znajdź tempo zmiany wysokości wody w zbiorniku w momencie gdy jest w pełni napełniony. Zakładamy, że objętość wody w zbiorniku zmniejsza się ze stałą szybkością, k .

Zadanie 8. (Zbiornik w kształcie stożka II). Rozpatrzmy zbiornik opisany w zadaniu 7. Zbiornik ma wysokość $6 [m]$, a promień jego podstawy $2 [m]$. Woda wpływa do zbiornika z szybkością $0,5 m^3/min$.

(a) Jak szybko zwiększa się promień powierzchni wody, gdy głębokość wody wynosi $1 [m]$?

(b) Jak szybko podnosi się powierzchnia wody gdy głębokość wody wynosi $1 m$?

Zadanie 9. (Zbiornik w kształcie stożka III). Rozpatrzmy zbiornik opisany w zadaniu 8. Woda wycieka ze zbiornika w ilości $0,1 [m^3/min]$ i jednocześnie jest pompowana od góry ze stałą prędkością $k [m^3/min]$. Wyznacz wartość stałej k , jeśli poziom wody rośnie w tempie $0,2 [m/min]$, gdy wysokość wody wynosi $2 [m]$.

Zadanie 10. (Rozprzestrzenianie się populacji). W 1905 roku czeski rolnik przypadkowo pozwolił kilku piżmakom amerykańskim (*Ondatra zibethicus*) uciec z niewoli. Populacja rosła i rozprzestrzeniała się, zajmując coraz większe obszary Europy. W klasycznej pracy z ekologii Skellama (1951),¹ wykazał, że pierwiastek kwadratowy zajmowanego przez populację obszaru wzrastał w czasie ze stałą szybkością, k . Określ szybkość zmiany odległości (od miejsca uwolnienia) z jaką rozprzestrzeniły się piżmaki. Można założyć, że rozszerzający się obszar zajmowany przez populację piżmaków jest okrągły.



Rysunek 4: Piżmak amerykański. <https://www.livescience.com/57668-muskrat-facts.html>

¹J. G. Skellam, RANDOM DISPERSAL IN THEORETICAL POPULATIONS Biometrika, Volume 38, Issue 1-2, June 1951, Pages 196-218, <https://doi.org/10.1093/biomet/38.1-2.196>