

Zadania i problemy do wykładu Matematyka dla specjalności GiBE
(ZESTAW NR 7)

ZADANIA

Zadanie 1. (Zera, lokalne minima i maksima). Miejsce zerowe funkcji $f(x)$ to punkt x_0 , dla którego $f(x_0) = 0$.

- (a) Znajdź miejsca zerowe, lokalne maksima i minima wielomianu $y = f(x) = x^3 - 3x$
- (b) Znajdź lokalne minima i maksima wielomianu $y = f(x) = (2/3)x^3 - 3x^2 + 4x$.
- (c) Określić, który z wielomianów podanych w podpunktach (a) i (b) ma punkt przegięcia.

Zadanie 2. (Klasyfikacja punktów krytycznych). Wyznacz punkty krytyczne, miejsca zerowe i punkty przegięcia funkcji $y = f(x) = x^3 - ax$. Następnie sklasyfikuj typy wyznaczonych punktów krytycznych.

Zadanie 3. (Maksimum i minimum globalne). Wyznacz absolutne maksimum i minimalne na danym przedziale:

- (a) $y = 2x^2$, na przedziale $[-3, 3]$,
- (b) $y = (x - 5)^2$, na przedziale $[0, 6]$,
- (c) $y = x^2 - x - 6$, na przedziale $[1, 3]$,
- (d) $y = \frac{1}{x} + x$, na przedziale $[-4, -\frac{1}{2}]$.

Zadanie 4. (Lokalne i globalne ekstrema). Funkcja $f(x)$ ma pochodną $f'(x) = 2x^2 - 3x$.

- (a) Wyznacz obszary, w których funkcja $f(x)$ rośnie lub maleje?
- (b) Wyznacz lokalne maksima lub minima.
- (c) Czy istnieje globalna wartość maksymalna lub minimalna dla tej funkcji?

Zadanie 5. (Punkty krytyczne paraboli). Wyznacz wartości parametrów a , b i c , dla których parabola $y = ax^2 + bx + c$ jest styczna do prostej $y = -2x + 3$ w punkcie o współrzędnych $(2, -1)$ i ma punkt krytyczny dla $x = 3$.

Zadanie 6. (Studnie potencjału). W fizyce funkcja

$$f(x) = x^4 - 2x^2,$$

nosi nazwę podwójnej studni potencjału. Fizycy kwantowi lubią o tym myśleć jak o "krajobrazie" ze wzgórzami i dolinami, w którym porusza się cząstka. Wyobraź sobie toczącą się piłkę wzdłuż takiego krajobrazu. Pod wpływem sił tarcia piłka w końcu zatrzymuje się. Naszkicuj postać tak opisanego krajobrazu i wykorzystując informacje o pochodnych funkcji $f(x)$, opisującej ten krajobraz, spróbuj przewidzieć, gdzie można znaleźć piłkę gdy się zatrzyma.

Zadanie 7. (Funkcja wypukła). Wyznacz pierwszą i drugą pochodną funkcji

$$y = f(x) = \frac{x^3}{1 - x^2}.$$

Skorzystaj z informacji o pochodnych, aby określić lokalne maksima i minima, regiony, w których krzywa jest wklęsła lub wypukła oraz punkty przegięcia.

Zadanie 8. (Klasyfikacja punktów krytycznych). Wyznacz wszystkie punkty krytyczne punkty funkcji

$$y = f(x) = 2x^3 + 3ax^2 - 12a^2x + 1,$$

i określić, jakiego rodzaju jest każdy z wyznaczonych punktów krytycznych. Możesz założyć że stała $a > 0$.

Zadanie 9. (Kurczenie się mięśnia). W 1938 roku Av Hill zaproponował model matematyczny opisujący szybkość kurczenia się mięśnia¹, v [cm/s], podczas pracy przeciw obciążeniu p [g]. Jego tak zwana krzywa *siła-prędkość* jest dana przez związek

$$(p + a)v = b(p_0 - p),$$

gdzie a , b , p_0 są dodatnimi stałymi.

- (a) Naszkicuj prędkość skracania w funkcji obciążenia, tj. v jako funkcję p .
- (b) Wyznacz tempo zmiany prędkości skracania w odniesieniu do obciążenia, czyli obliczyć dv/dp .
- (c) Jakie jest największe obciążenie, przy którym mięsień kurczy się?

Wskazówka. *Kurczący się mięsień ma dodatnią prędkość skracania, podczas gdy mięsień z bardzo dużym obciążeniem raczej się rozciąga niż kurczy, tj. ma ujemną wartość v .*

Zadanie 10. (Kinetyka reakcji). Chemicy często opisują szybkość nasycenia reakcji chemicznej z użyciem kinetyki Michaelisa-Menten, R_m , lub kinetyki opisanej funkcją sigmoidalną, R_s .

$$R_m(c) = \frac{Kc}{k_n + c}, \quad R_s(c) = \frac{Kc^2}{k_n^2 + c^2},$$

gdzie c jest stężeniem reagenta, $K > 0$, $k_n > 0$ to stałe. $R_i(c)$, $i = m, s$ opisuje szybkość reakcji przebiegającej przy stężeniu reagenta wynoszącym c .

- (a) Naszkicuj dwie krzywe. Aby to zrobić, powinieneś przeanalizować zachowanie dla $c = 0$, dla małego c i dla bardzo dużego c . Znajdziesz poziomą asymptotę w obu przypadkach. Odnosimy się do tej asymptoty jako "maksymalna prędkość reakcji". Jaka jest "maksymalna prędkość reakcja" dla każdej z funkcji R_m , R_s ?

Uwaga. *Wyraź swoją odpowiedź za pomocą stałych K , k_n .*

- (b) Pokaż, że dla stężenia $c = k_n$ reakcja przebiega z połową swojej maksymalnej szybkości.

W przypadku poniższych pytań możesz założyć, że $K = 1$ i $k_n = 1$.

- (c) Pokaż, że kinetyka sigmoidalna, ale nie kinetyka Michaelisa-Mentena ma punkt przegięcia.
- (d) Wyjaśnij, jak zmieniłyby się te krzywe, gdyby wartość K wzrosła; jeśli wartość k_n wzrośnie

¹Artykuł Archibalda Viviana Hilla, "The heat of shortening and the dynamic constants of muscle", jest dostępny pod adresem: <https://royalsocietypublishing.org/doi/pdf/10.1098/rspb.1938.0050>