

Zadania i problemy do wykładu Matematyka dla specjalności GiBE
(ZESTAW NR 8)

ZADANIA

Zadanie 1. (Odległość, prędkość i przyspieszenie). Tramwaj rusza w chwili $t = 0$ i jeździ do końca swojej trasy i z powrotem. Jego odległość od miejsca startu w chwili t można w przybliżeniu opisać przez funkcję

$$S(t) = 4t^3(10 - t),$$

gdzie czas t mierzymy w minutach, $0 < t < 10$, a S to odległość w metrach.

- (a) Wyznacz prędkość tramwaju jako funkcję czasu.
- (b) Kiedy tramwaj porusza się z największą prędkością?
- (c) W jakim momencie dojeżdża do punktu najbardziej oddalonego od miejsca startu?
- (d) Naszkicuj przyspieszenie, prędkość oraz położenie tramwaju na tym samym układzie współrzędnych.

Zadanie 2. (Wzrost składników odżywczych w komórce cylindrycznej). Rozważ długą, chudą komórkę w kształcie walca o promieniu r i stałej długości L . Objętość i pole powierzchni takiej komórki (pomijając końcówki) to $V = \pi r^2 L = K$ i $S = 2\pi r L$. Przyjmujemy, że wzrost netto składników pokarmowych $N(r)$ jest różnicą między wchłanianiem, które jest proporcjonalnym do powierzchni S i konsumpcją, która jest proporcjonalna do objętości V .

- (a) Wyznacz szybkość wzrostu netto składników pokarmowych jako funkcji r .
- (b) Znajdź promień cylindrycznej komórki, który maksymalizuje $N(r)$.

Zadanie 3. (Minimalna odległość). Znajdź minimalną odległość od punktu na dodatniej części oś OX , $(a, 0)$ do paraboli $y^2 = 8x$.

Zadanie 3. (Największy ogród). Budujesz ogrodzenie, aby całkowicie ogrodzić część Twojego ogrodu na warzywniak. Masz do dyspozycji materiał na ogrodzenie o długości $100 [m]$. Jaki jest największy prostokątny obszar, który możesz ogrodzić?

Zadanie 3. (Dwa ogrody). Do ogrodzenia dwóch ogrodów masz do dyspozycji $100 [m]$ ogrodzenia. Jeden ogród ma mieć okrągły kształt, a drugi kształt kwadratowy. Określ, jak należy podzielić ogrodzenie, aby suma powierzchni wewnątrz obu ogrodów była jak największa.

Zadanie 4. (Woda i lód. Dlaczego lód unosi się na wodzie? Ponieważ gęstość lodu jest niższa niż gęstość wody! W rzeczywistości woda jest jedyną powszechną cieczą, której maksymalna gęstość występuje powyżej temperatury zamarzania. Ten fenomen sprzyja przetrwaniu organizmów wodnych, zapobiegając tworzeniu się lodu na dnie jezior. Według chemii fizycznej, masa wody, która zajmuje jeden litr w temperaturze $0^\circ C$ zajmuje w temperaturze $T^\circ C$ gdy $0 \leq T \leq 30$ objętość

$$V = -aT^3 + bT^2 - cT + 1,$$

litów. Wartości współczynników to

$$a = 6,79 \times 10^{-8}, \quad b = 8,51 \times 10^{-6}, \quad c = 6,42 \times 10^{-5}.$$

Wyznacz temperaturę z zakresu od $0^\circ C$ do $30^\circ C$, przy której gęstość woda jest największa.

Zadanie 5. (Dawki leków). Reakcja $R(x)$ organizmu pacjenta na lek w dawce wielkości x zależy od rodzaju leku. Dla pewnego leku ustalono, że zadawający opis relacji ma reakcja i dawkę ma postać:

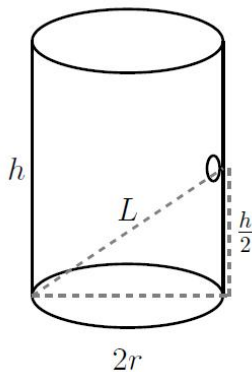
$$R(x) = Ax^2(B - x),$$

gdzie A i B są dodatnimi stałymi. Wrażliwość organizmu pacjenta na lek definiuje się jako $R'(x)$.

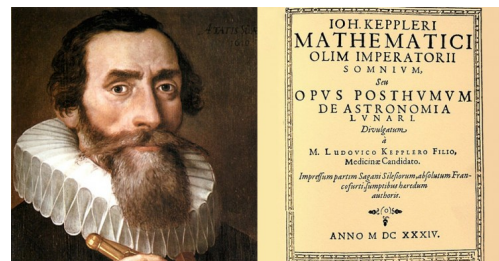
- (a) Dla jakiej wartości x reakcja na lek jest maksymalna i jaka jest wartość maksymalnej reakcji?
- (b) Dla jakiej wartości x czułość jest maksymalna? Jaka jest interpretacja maksymalnej czułości?

PROBLEMY

Problem 1. (Problem Keplera). W roku 1613 Kepler postanowił kupić kilka beczek wina na swoje ślubne przyjęcie. Aby obliczyć koszt, kupiec zanurza miernik przez otwór na szpunt, jak pokazano na rysunku 1, i mierzy długość L "mokrej" części pręta mierniczego. Koszt beczki wina jest ustalony proporcjonalnie do L . Kepler zauważył, że beczki mają różne kształty. Niektóre są wysokie i chude, podczas gdy inne są przysadziste i grube. Domyślał się, że przy tej samej wielkości L beczki o różnych kształtach zawierają równe ilości wina. Znajac matematykę, postanowił ustalić jaki kształt beczki byłby najbardziej dla niego korzystny.



Rysunek 1: Ilustracja problemu Keplera dla cylindrycznej beczki o średnicy $2r$ i wysokość h . Założyliśmy, że wysokość otwór na szpunt to $h/2$. Długość L oznacza "mokrą" część pręta pomiarowego kupca, służąca do określenia ceny.



Rysunek 2: Johannes Kepler w 1610 i jego epokowe dzieło z astronomii.

Rozwiąż problem rozważany przez Keplera gdy dla uproszczenia przyjmujemy, że beczki mają kształt walca.

Znajdź proporcje (wysokość: promień) walca, który ma największą objętość przy założeniu stałej długości L (przerwany odcinek na rysunku 1). Przyjmujemy następujące założenia:

1. Beczka ma kształt walca.
2. Otwór na szpunt znajduje się w połowie wysokości beczka.
3. Beczka jest pełna.

Problem 2. (Termoregulacja w roju pszczół). Zimą pszczoły miodne czasami uciekają z ula i tworzą ciasny rój na drzewie, gdzie, drżąc, mogą wytwarzać ciepło i utrzymywać temperaturę roju na wyższym poziomie niż temperatura otoczenia.

Energia cieplna jest tracona przez powierzchnię roju w proporcjonalnym tempie do pola powierzchni ($k_1 S$, gdzie $k_1 > 0$ jest stałą). Energia cieplna jest produkowana wewnątrz roju, w tempie proporcjonalnym do masy roju (można przyjąć, że masa jest równa objętości pomnożonej przez stałą). Załóżmy, że produkcja ciepła jest równa $k_2 V$, gdzie $k_2 > 0$ jest stałą. Roje, które nie są wystarczająco duże, mogą tracić więcej ciepła niż mogą produkować i niestety umierają. Tempo wyczerpywania się ciepła to tempo strat minus tempo produkcji. Załóżmy, że rój jest kulisty. Wyznacz rozmiar roju, dla którego tempo wyczerpywania się ciepła jest największe.

Problem 3. (Tempo przyrostu energii netto podczas żerowania i podróży). Zwierzęta zużywają energię na podróżowanie i żerowanie. W niektórych środowiskach to właśnie straty energii na podróż do żerowiska i samo żerowanie stanowią znaczną część budżetu energetycznego. W takich sytuacjach, sensownie jest założyć, że aby przetrwać, jednostka powinna optymalizować tempo przyrostu energii netto, zdefiniowanej jako

$$Q(t) = \frac{\text{Uzyskana energia netto}}{\text{Łączny czas podróży i żerowania}} = \frac{\text{Uzyskana energia} - \text{Energia utracona}}{\text{Łączny czas podróży i żerowania}}.$$

Założmy, że zwierzę zużywa w sumie p jednostek energii na jednostkę czasu na każdą czynność (żerowanie i podróżowanie). Załóżmy, że zysk energii na żerowisku przez czas t jest określony przez równanie:

$$f(t) = \frac{E_{max}t}{k+t},$$

gdzie E_{max} , $k > 0$, są stałymi. Wyznacz optymalny czas żerowania, czyli czas t , dla którego $Q(t)$ osiąga wartość maksymalną.

Problem 4. (Ekologia behawioralna). Zwierzęta społeczne, które żyją w grupach, mogą spędzać mniej czasu na skanowanie w poszukiwaniu drapieżników niż samotne osobniki. Jednak, tracą czas walcząc z innymi członkami grupy o dostępne jedzenie. Istnieje pewna wielkość grupy, w której korzyści netto są największe ponieważ zwierzęta spędzają najmniej czasu na tych bezproduktywnych czynnościach - i dzięki temu mogą spędzać czas na odpoczynek, poszukiwanie partnerów, wychowywanie potomstwa itp. Załóżmy, że dla grupa o rozmiarze x , ułamek czasu poświęcany na skanowanie otoczenia w celu wykrycia zagrożenia jest równy

$$S(x) = A \frac{1}{(x+1)},$$

natomiast ułamek czasu spędzony na rywalizacji z innymi zwierzętami ze swojej grupy to

$$F(x) = B(x+1)^2,$$

gdzie A , B to stałe. Wyznacz wielkość grupy, dla której stracony czas na skanowanie i rywalizację jest najmniejszy.