

Zadania i problemy do wykładu Matematyka dla specjalności GiBE
(ZESTAW NR 9)

ZADANIA

Zadanie 1. (Pochodna funkcji wykładniczych i logarytmicznych). Wyznacz pierwszą pochodną dla każdej z następujących funkcji:

(a) $y = \ln(2x + 3)^3$,

(e) $y = e^{3x^2}$,

(b) $y = [\ln(2x + 3)]^3$,

(f) $y = a^{-\frac{1}{2}x}$,

(c) $y = \ln(\cos \frac{1}{2}x)$,

(g) $y = x^3 \cdot 2^x$,

(d) $y = \log_a(x^3 - 2x)$,

(f) $y = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$.

Uwaga. $\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}$

Zadanie 2. Dla poniżej wymienionych funkcji wyznacz punkty krytyczne oraz określ ich charakter

(a) $f(x) = x(x^2 - 4)$,

(d) $f(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}$, $-1 < x < 1$,

(b) $f(x) = x^3 - \ln(x)$, $x > 0$,

(e) $f(x) = x - 3\sqrt[3]{x}$,

(c) $f(x) = xe^{-x}$,

(f) $f(x) = e^{-2x} - e^{-x}$.

Zadanie 3. Dla każdej z poniższych funkcji obliczyć odpowiednią pochodną, i pokaż, że funkcja spełnia wskazane równanie różniczkowe:

(a) $f(x) = 2e^{-3x}$, $f'(x) = -3f(x)$,

(b) $f(t) = Ce^{kt}$, $f'(t) = kf(t)$,

(c) $f(t) = 1 - e^{-t}$, $f'(t) = 1 - f(t)$.

Zadanie 4. (Liniowe równanie różniczkowe). Rozważmy funkcję $y = f(t) = Ce^{kt}$ gdzie C i k są stałymi. Dla jakich wartości tych stałych ta funkcja spełnia równanie:

(a) $\frac{dy}{dt} = -5y$,

(b) $\frac{dy}{dt} = 3y$.

Zadanie 5. Wyznacz funkcję, która jest rozwiązaniem każdego z poniższych równań różniczkowych.

(a) $\frac{dy}{dt} = -y$,

(b) $\frac{dc}{dx} = -0,1c$, oraz $c(0) = 20$,

(c) $\frac{dz}{dt} = 3z$, oraz $z(0) = 5$.

Uwaga. Wszystkie odpowiedzi powinny być funkcjami wykładniczymi, ale mogą mieć różne zmienne zależne lub niezależne.

Zadanie 6. (Leczenie antybiotykami). Kolonię bakterii traktujemy łagodnym antybiotykiem, w skutek czego bakterie zaczynają umierać. Zauważono, że gęstość bakterii w funkcji czasu można opisać w przybliżeniu zależnością następującej postaci $b(t) = 85e^{-0,5t}$, gdzie t to czas w godzinach jaki upłynął po zastosowaniu antybiotyku.

(a) Określ czas potrzebny do tego aby zginęła połowa bakterii (jest to tak zwany okres półtrwania).

(b) Wyznacz czas potrzebny na to by zginęło 99% bakterii.

Zadanie 7. (Liniowe równanie różniczkowe). Rozważmy równanie różniczkowe

$$\frac{dy}{dt} = a - by,$$

gdzie a, b są stałymi.

(a) Pokaż, że dla dowolnej stałej C funkcja

$$y(t) = \frac{a}{b} - Ce^{-bt},$$

spełnia powyższe równanie różniczkowe.

(b) Pokaż, że gdy przyjmiemy

$$C = \frac{a}{b} - y_0,$$

to rozwiązanie spełnia dodatkowo warunek początkowy

$$y(0) = y_0.$$

Uwaga. W ten sposób pokażemy, że funkcja

$$y(t) = \left(y_0 - \frac{a}{b}\right)e^{-bt} + \frac{a}{b},$$

jest rozwiązaniem równania różniczkowego $\frac{dy}{dt} = a - by$, z warunkiem początkowym $y(0) = y_0$.

Zadanie 8. Pokaż, że funkcja

$$y(t) = \frac{1}{1-t},$$

jest rozwiązaniem poniższego równania różniczkowego z warunkiem początkowym

$$\frac{dy}{dt} = y^2, \quad y(0) = 1.$$

Skomentuj, co dzieje się z tym rozwiązaniem gdy t zbliża się do 1.

Zadanie 9. Dla każdego z poniższych równań różniczkowy pokaż, że podana funkcja y jest jego rozwiązaniem.

$$(a) \quad t \frac{dy}{dt} = 3y, \quad y = 2t^3.$$

$$(b) \quad \frac{d^2y}{dt^2} + y = 0, \quad y = -2\sin(t) + 3\cos(t).$$

$$(d) \quad \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} + y = 6e^t, \quad y = 3t^2 e^t.$$

Zadanie 10. (Tarcie i prędkość końcowa). Prędkość spadającego obiektu zmienia się pod wpływem grawitacji, ale tarcie ma również wpływ na zmianę prędkości. W tej sytuacji równanie różniczkowe opisujące prędkość $v(t)$ spadającego obiektu w ośrodku różnym od próżni ma postać

$$\frac{dv}{dt} = g - kv,$$

gdzie g jest przyspieszeniem grawitacyjnym, a k jest stałą, która reprezentuje efekt tarcia. Obiekt jest upuszczany z pozycji spoczynkowej z samolotu.

- (a) Wyznacz funkcję $v(t)$, która reprezentuje prędkość spadającego obiektu w chwili t .
- (b) Co dzieje się z prędkością obiektu po opadaniu przez długi czas, ale zanim spadnie na ziemię?

Zadanie 11. (Poziom alkoholu). Zakładamy, że alkohol dostaje się do krwiobiegu ze stałą szybkością k gramów na jednostkę czasu, podczas jego picia. Wątroba stopniowo metabolizuje alkohol na inne, nietoksyczne produkty uboczne. Współczynnik konwersji na jednostkę czasu jest proporcjonalny do aktualnego poziomu alkoholu we krwi, tak że równanie różniczkowe spełniane przez poziom alkoholu we krwi przyjmuje postać

$$\frac{dc}{dt} = k - sc,$$

gdzie k, s są dodatnimi stałymi.

Założmy, że początkowo nie ma alkoholu w krwi. Wyznacz poziom alkoholu we krwi $c(t)$ jako funkcję czasu przyjmując $t = 0$, jako moment, w którym alkohol zaczął być spożywany.

Zadanie 12. (Przyrost masy ciała niemowlęcia). W pierwszym roku życia waga dziecko może być opisana przez funkcję

$$y(t) = \sqrt{3t + 64},$$

gdzie t jest mierzone w pewnych wygodnych jednostkach.

- (a) Pokaż, że y spełnia równanie różniczkowe

$$\frac{dy}{dt} = \frac{k}{y}, \quad \text{gdzie } k \text{ jest dodatnią stałą.}$$

- (b) Jaka jest wartość k ?

Krzysztof Topolski