

Zadania i problemy do wykładu Matematyka dla specjalności GiBE
(ZESTAW NR 4)

ZADANIA

Zadanie 1. Oblicz pole figury ograniczonej krzywymi:

- (a) $x = 0, \quad x = 5, \quad y = x(5 - x) + 1;$
- (b) $x = 0, \quad x = 3, \quad y = \sqrt{x + 1};$
- (c) $y = x(5 - x) + 1, \quad x \in [0, \pi];$
- (d) $x = \ln 2, \quad x = \ln 5, \quad y = \exp\{-x\};$
- (e) $x = e^2, \quad x = e^5, \quad y = \frac{1}{x}.$

Zadanie 2. Oblicz pole zawarte pomiędzy krzywą $y = x^2 - 1$ i osią OX , ograniczone od prawej prostą $x = 2$, a od lewej prostą $x = 0$.

Zadanie 3. Oblicz wartość następujących całek oznaczonych:

- (a) $\int_1^2 (x^4 - 3x^2) dx$
- (b) $\int_0^\pi (3x^2 - \cos(3x)) dx$
- (c) $\int_0^b e^{-kx} dx$
- (d) $\int_0^x (y^2 + 3y - 1) dy$
- (e) $\int_0^{\pi/4} (\cos(x) + \sin(2x)) dx$
- (f) $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$
- (g) $\int_1^e (x + x^{-1}) dx$
- (h) $\int_0^{\pi/6} (\cos(2x) + \sin(x)) dx$
- (i) $\int_1^5 \frac{x^2 + 1}{x} dx$
- (j) $\int_0^1 (e^{2t} + e^{-2t}) dt$
- (k) $\int_0^{\pi/2} 3(\sin(x) + 1)^2 \cos(x) dx$
- (l) $\int_0^1 x\sqrt{x^3 + 1} dx$

Zadanie 4. Sumę całek oznaczonych $\int_{-1}^0 (1 + x)e^{-kx} dx + \int_0^1 (1 - x)e^{-kx} dx$, gdzie $k \neq 0$, można zapisać w postaci jednej całki oznaczonej.

- Skorzystaj z podstawienia $y = -x$, w pierwszej całce.
- Zamień granice całkowania w nowo zdefiniowanej całce wykorzystując fakt, że

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx,$$

dla dowolnej funkcji f dla której te całki są zdefiniowane.

- Dodaj obie całki, tak aby otrzymać jedną całkę.

Zadanie 5. Oblicz wartość następujących całek nieoznaczonych:

- (a) $\int \left(\frac{5}{x+4} - x^2 \right) dx$
- (b) $\int (\sin(x-1) + \cos(x-1)) dx$
- (c) $\int \left(\sqrt[3]{e^x} + \sqrt{\frac{1}{x-7}} \right) dx$
- (d) $\int \left(\sqrt[7]{x+1} + \frac{x^4}{3} \right) dx$
- (e) $\int (2x^2 + 3x - 1)x dx$
- (f) $\int (4x^4 - 2x^2 + e^x) dx$