Zadania i problemy do wykładu Procesy Markowa (Zestaw nr 6)

Zadania

Zadanie 1. Znaleźć stacjonarny rozkład na $J = \{1, 2, 3\}$ dla macierzy stochastycznej

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha & 0 \\ 0 & 1-\beta & \beta \\ \gamma & 0 & 1-\gamma \end{pmatrix},$$

gdzie $\alpha, \beta, \gamma \in (0, 1)$.

Zadanie 2. Znaleźć rozkład stacjonarny dla łańcucha Markowa zdefiniowanego w modelu Ehrenfestów jako liczba kul w urnie pierwszej. Ponado znaleźć średnią rozkładu stacjonarnego.

Odp. $\pi_i = \frac{1}{2^N}\binom{N}{i}$

Zadanie 3. (Jeden ekran odbijający). Rozpatrzmy macierz błądzenia losowego z $p_{k,k+1} = p,\ p_{k,k-1} = 1 - p = q$, dla $k = 2, 3, \dots$ i $p_{1,2} = p,\ p_{1,1} = q$. Udowodnić, że wszystkie stany są chwilowe, jeżeli $p > q$, powracające zerowe (zerowo rekurencyjne), gdy $p = q$, i dodatnio rekurencyjne gdy $p < q$. Znaleźć rozkład stacjonarny.

Zadanie 4. (Dwa ekrany odbijające). JŁM o stanach $1, 2, \dots, a$ ma macierz, której pierwszy i ostatni wiersz są odpowiednio równe $(q, p, 0, \dots, 0)$ oraz $(0, \dots, 0, q, p)$. We wszystkich pozostałych wierszach $p_{k,k+1} = p,\ p_{k,k-1} = q$. Znaleźć rozkład stacjonarny. Czy ten łańcuch może być okresowy?

Zadanie 5. Znaleźć rozkład stacjonarny dla macierzy stochastycznej $\mathbb{P}$ zdefiniowanej na przestrzeni stanów $J = \{0, 1, 2, ..., N\}$ przez

$$p_{i,i+1} = p_i, \quad p_{i,i-1} = q_i, \quad p_{i,i} = r_i, \quad p_i + q_i + r_i = 1, \quad i = 1, 2, ..., N-1,$$

$$p_{0,1} = 1, \quad p_{N,N-1} = 1$$

Odp: $\pi_1 = \pi_0 \frac{1}{q_1}, \quad \pi_i = \pi_0 \frac{p_1 p_2 \cdots p_{i-1}}{q_1 q_2 \cdots q_i}$, dla $i = 2, 3, ...N$.

Proces Markowa opisany przez powyższą macierz stochastyczną nazywa się *Procesem urodzin i śmierci w dyskretnym czasie z dwoma ekranami odbijającymi.* Szczególny przypadek tego modelu nazywa się błądzeniem losowym z dwoma ekranami odbijającymi. Również model Ehrenfestów jest szczególnym przypadkiem powyższego modelu.

Zadanie 6. Znaleźć warunki, przy których istnieje rozkład stacjonarny oraz rozkład stacjonarny dla *procesu urodzin i śmierci* z ekranem odbijającym w zerze, tj, gdy $N = \infty, r_i = 0$.

Odp: $\pi_1 = \pi_0 \frac{1}{q_1}, \quad \pi_i = \pi_0 \frac{p_1 p_2 \cdots p_{i-1}}{q_1 q_2 \cdots q_i}$, dla $i = 2, 3, ...$

$$\pi_0 \left(1 + \frac{1}{q_1} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{p_1 p_2 \cdots p_j}{q_1 q_2 \cdots q_{j+1}}\right) = 1$$

Zadanie 7. (Błądzenie przypadkowe z ekranami sprężystymi). Rozpatrzmy symetryczne błądzenie przypadkowe w ograniczonym obszarze płaszczyzny. Ograniczenie obszaru jest sprężyste w tym sensie, że ilekroć w nieograniczonym błądzeniu przypadkowym cząstka opuściłaby obszar, to zmuszona jest powrócić do ostatniego położenia. Udowodnić, że jeżeli każdy punkt obszaru może być osiągnięty z dowolnego innego punktu, to istnieje rozkład stacjonarny $\pi = \{\pi_k\}$ i $\pi_k = 1/a$, gdzie a oznacza ilość wszystkich położeń w obszarze.

Zadanie 8. Niech $\{X_n, n \geqslant 0\}$ będzie jednorodnym łańcuchem Markowa z macierzą prawdopodobieństw przejść $\mathbb{P}$ i niech $P(X_0 = i) = \pi_i > 0$ dla wszystkich $i \in J$, gdzie $\pi^T = \{\pi_i, i \in J\}$ jest stacjonarnym rozkładem. Niech macierz $\mathbb{Q} = \{q_{i,j}, i, j \in J\}$ będzie zdefiniowana przez

$$\pi_i q_{i,j} = \pi_j p_{j,i}.$$

Niech $\{\tilde{X}_n, -\infty < n < \infty\}$ będzie procesem o skończenie wymiarowych rozkładach postaci

$$P(\tilde{X}_{-1} = i_1, \tilde{X}_{-2} = i_2, ..., \tilde{X}_{-k} = i_k | \tilde{X}_0 = i, \tilde{X}_1 = j_1, ..., \tilde{X}_n = j_n)$$

$$= P(\tilde{X}_{-1} = i_1, \tilde{X}_{-2} = i_2, ..., \tilde{X}_{-k} = i_k | \tilde{X}_0 = i) = q_{i,i_1} q_{i_1,i_2} \cdots q_{i_{k-1},i_k}$$

dla wszystkich $k \geqslant 1, n \geqslant 1, i, i_1, ..., i_k, j_1, ..., j_n \in J$.
Pokazać, że $\{\tilde{X}_n, -\infty < n < \infty\}$ jest jednorodnym łańcuchem Markowa z macierzą prawdopodobieństw przejść $\mathbb{P}$ oraz $P(\tilde{X}_n = i) = \pi_i$ dla wszystkich $i \in J$ oraz wszystkich $n \in \{..., -1, 0, 1, ...\}$.

Zadanie 9. Przeliczalna liczba cząstek przemieszcza się niezależnie w zbiorze J, tak, że każda cząstka przemieszcza się z punktu i do punktu j z prawdopodobieństwem $p_{i,j}$ (każda cząstka przemieszcza się w zbiorze J zgodnie z łańcuchem Markowa o macierzy prawdopodobieństw przejść $\mathbb{P} = (p_{i,j})$). Niech $A_n(i)$ będzie liczbą cząstek w stanie $i \in J$ w chwili $n \geqslant 0$ oraz załóżmy, że $A_0(i)$, $i \in J$, są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie Poissona odpowiednio ze średnią $\mu_i, i \in J$, gdzie $\mu = \{\mu_i, i \in J\}$ jest miarą niezmienniczą dla macierzy $\mathbb{P}$. Pokazać, że dla wszystkich $n \geqslant 1$, zmienne losowe $A_n(i)$, $i \in J$, są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie Poissona ze średnią odpowiednio μ_i, $i \in J$.

Zadanie 10. Stochastyczna macierz na przestrzeni J nazywa się podwójnie stochastyczną jeżeli dla wszystkich stanów $i \in J$ zachodzi $\sum_{j \in J} p_{j,i} = 1$. Załóżmy dodatkowo, że macierz $\mathbb{P}$ jest nieredukowalna oraz J jest nieskończona. Znaleźć miarę niezmienniczą dla $\mathbb{P}$. Pokazać, że $\mathbb{P}$ nie może być dodatnio rekurencyjną.

Zadanie 11. Pierwszy wiersz macierzy stochastycznej $\mathbb{P}$ ma postać $(p_1, p_2, \dots)$. W pozostałych przypadkach $p_{j,j-1} = 1$. Zbadać ten JłM i znaleźć jego rozkład stacjonarny, jeżeli istnieje.

Zadanie 12. Pierwsza kolumna macierzy stochastycznej $\mathbb{P}$ ma postać $(q_0, q_1, \dots)$ a $p_{i,i+1} = 1 - q_i$ dla $i = 0, 1, 2 \dots$ Udowodnić, że wszystkie stany tego JłM są chwilowe wtedy i tylko wtedy, gdy $\sum_j q_j < \infty$. Kiedy są one stanami zerowo rekurencyjnymi? Znaleźć rozkład stacjonarny, jeżeli istnieje.

Zadanie 13. Pierwszy wiersz macierzy stochastycznej $\mathbb{P}$ ma postać $(p_1, p_2, \dots)$. W pozostałych przypadkach $p_{i,i-1} = 1$. Zbadać ten JłM oraz znaleźć jego rozkład stacjonarny jeżeli istnieje.