

Statystyka

Lista 1

Zadanie 1.

Wygeneruj n obserwacji z rozkładu $N(\theta, \sigma^2)$.

- (a) $n = 50, \theta = 1, \sigma = 1,$
- (b) $n = 50, \theta = 4, \sigma = 1,$
- (c) $n = 50, \theta = 1, \sigma = 2.$

Na tej podstawie oblicz wartość estymatora parametru θ postaci

- (i) $\hat{\theta}_1 = \bar{X} = (1/n) \sum_{i=1}^n X_i,$
- (ii) $\hat{\theta}_2 = Me\{X_1, \dots, X_n\},$
- (iii) $\hat{\theta}_3 = \sum_{i=1}^n w_i X_i, \sum_{i=1}^n w_i = 1, 0 \leq w_i \leq 1, i = 1, \dots, n,$ z własnym wyborem wag,
- (iv) $\hat{\theta}_4 = \sum_{i=1}^n w_i X_{i:n},$ gdzie $X_{1:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$ są uporządkowanymi obserwacjami $X_1, \dots, X_n,$
$$w_i = \varphi\left(\Phi^{-1}\left(\frac{i-1}{n}\right)\right) - \varphi\left(\Phi^{-1}\left(\frac{i}{n}\right)\right),$$

przy czym φ jest gęstością, a Φ dystrybuantą standardowego rozkładu normalnego $N(0, 1)$.

Doświadczenie powtórz 10 000 razy. Na tej podstawie oszacuj wariancję, błąd średniokwadratowy oraz obciążenie każdego z estymatorów. Przedyskutuj uzyskane wyniki.

Zadanie 2.

Omów komendę `set.seed(1)` oraz jej potencjalne zastosowania.

Zadanie 3.

Omów konieczność numerycznego wyznaczania estymatorów największej wiarygodności na przykładzie estymacji parametru przesunięcia w rozkładzie logistycznym (przykład 6.1.4, str. 315, Hogg i inni, 2005).

Zadanie 4.

Omów wybraną metodę numeryczną pozwalającą na wyznaczenie estymatora największej wiarygodności (patrz, np., str. 329, Hogg i inni, 2005).

Zadanie 5.

Wygeneruj n obserwacji z rozkładu logistycznego $L(\theta, \sigma)$ z parametrem przesunięcia θ i skali σ .

- (a) $n = 50, \theta = 1, \sigma = 1,$
- (b) $n = 50, \theta = 4, \sigma = 1,$
- (c) $n = 50, \theta = 1, \sigma = 2.$

Oszacuj wartość estymatora największej wiarygodności parametru θ na podstawie wygenerowanej próby. Przedyskutuj wybór punktu początkowego oraz liczbę kroków w algorytmie.

Doświadczenie powtórz 10 000 razy. Na tej podstawie oszacuj wariancję, błąd średniokwadratowy oraz obciążenie estymatora. Przedyskutuj uzyskane wyniki.

Zadanie 6.

Wygeneruj n obserwacji z rozkładu Cauchy'ego $C(\theta, \sigma)$ z parametrem przesunięcia θ i skali σ .

(a) $n = 50, \theta = 1, \sigma = 1,$

(b) $n = 50, \theta = 4, \sigma = 1,$

(c) $n = 50, \theta = 1, \sigma = 2.$

Oszacuj wartość estymatora największej wiarygodności parametru θ na podstawie wygenerowanej próby. Przedyskutuj wybór punktu początkowego oraz liczbę kroków w algorytmie.

Doświadczenie powtórz 10 000 razy. Na tej podstawie oszacuj wariancję, błąd średniokwadratowy oraz obciążenie estymatora. Przedyskutuj uzyskane wyniki.

Zadanie 7.

Powtórz eksperyment numeryczny z zadań 1, 5 oraz 6 dla $n = 20$ i $n = 100$. Przedyskutuj uzyskane rezultaty w nawiązaniu do wcześniejszych wyników.

Literatura

Hogg, R. V., McKean, J. W., Craig, A. T. (2005). *Introduction to Mathematical Statistics*. Pearson Education International, London.