Zadania do wykładu *Estymacja parametrów*

(Zestaw nr 2)

Zadanie 1. Niech $X_1, ..., X_n$ będzie próba losową z populacji o rozkładzie z dystrybuantą F_X. Definiujemy zmienne losowe $Y_1, ..., Y_n$ w następujący sposób

$$Y_i = \begin{cases} 1, & \text{gdy} \quad X_i > \mu \\ 0, & \text{gdy} \quad X_i \leqslant \mu, \end{cases}$$

Znajdź rozkład statystyki $T(X_1, ..., X_n) = \sum_{i=1}^{n} Y_i$.

Zadanie 2. Dla dowolnego zbioru $A \subset \mathbf{R}$ oznaczmy przez $\mathbf{1}_A$ oznaczmy *indykator zbioru* A okreslony w następujacy sposób:

$$\mathbf{1}_A = \begin{cases} 1, & \text{gdy} \quad \text{gdy } x \in A, \\ 0, & \text{gdy} \quad \text{gdy } x \notin A. \end{cases}$$

Dla danej próby losowej X_1, $X_2, ..., X_n$ *dystrybuanta empiryczna* $F_n(x)$ w punkcie x jest określona następujacym wzorem:

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{(-\infty, x)}(X_i).$$

Pokaż, że jeśli elementy próby losowej maja rozkład o dystrybuancie $F(x)$ to:

1. $\mathbf{E}F_n(x) = F(x)$,
2. $\mathbf{Var}(F_n(x)) = \frac{F(x)(1-F(x))}{n}$.
3. Co się stanie z $F_n(x)$ gdy $n \to \infty$?

Zadanie 3. Niech $X_1, ..., X_n$ będzie próba losową z populacji o rozkładzie z dystrybuantą F_X. Definiujemy statystyki M i m odpowiednio jako

$$M(X_1, ..., X_n) = \max(X_1, X_2, ..., X_n), \quad m(X_1, ..., X_n) = \min(X_1, X_2, ..., X_n).$$

Znajdź rozkłady statystyki $M(X_1, ..., X_n)$ oraz $m(X_1, ..., X_n)$.

Zadanie 4. Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach Poissona odpowiednio z parametrami λ_1 i λ_2. Jaką postać ma rozkład zmiennej losowej $Z = X + Y$?

Zadanie 5. Niech U_i, $i = 1, 2, ...$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na odcinku $(0, 1)$, a zmienna losowa X ma rozkład

$$P(X = k) = \frac{c}{k!}, \quad k = 1, 2, 3, ...$$

gdzie $c = 1/(e-1)$. Policz rozkład zmiennej losowej

$$Z = \min(U_1, U_2, ..., U_X).$$

Zadanie 6. Niech $X_1, ..., X_n$ będzie próba losową. Zdefiniujmy statystykę $\hat{S}^2$

$$\hat{S}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2,$$

gdzie $\bar{X}$ jest średnią z próby. Policz wartość oczekiwaną statystyki $\hat{S}^2$.

Krzysztof Topolski