Zadania i problemy do wykładu *Estymacja parametrów*

Estymacją metodą najmniejszych kwadratów

Zadanie 1. Rozpatrzmy następujące dane: $(1, 2)$ $(3, 1.8)$ $(5, 1)$.

1. Na podstawie tych danych oszacuj metodą najmniejszych kwadratów parametry α i β prostej regresji $y = \alpha + \beta x$.
2. Wylicz wartości residułów r_1, r_2 i r_3 i sprawdź, że sumuja się one do zera.
3. Przedstaw, na jednym rysunku, punty danych i prostą regresji.

Zadanie 2. Dodanie jednego punktu może dramatycznie zmienić oszacowania dla α i β prostej regresji. Przyjmijmy, że do danych z zadania 1 dodajemy jeden punkt pomiarowy, w wyniku czego otrzymujemy następujacy zbiór danych: $(0, 0)$, $(1, 2)$ $(3, 1.8)$ $(5, 1)$. Na podstawie tych danych wyznacz metodą najmniejszych kwadratów estymator β.

Zadanie 3. Wykaż, że prosta regresji, $y = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x$, zawsze przechodzi przez *środek ciężkośći* danych, czyli punkt $(\bar{x}, \bar{y})$.

Zadanie 4. W niektórych sytuacjach wiemy, że prosta regresji przechodzi przez początek układu, czyli punkt o współzędnych $(0, 0)$. Model przyjmuje wtedy postać

$$Y_i = \beta x_i + U_i, \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Wykaż, że $\hat{\beta}$, estymatorem najmniejszych kwadratów parametru β, ma postać

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i Y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Zadanie 5. Rozpatrzmy zagadnienie oszacowania stałej grawitacyjnej na podstwie danych pochodzących z obserwacji swobodnie spadajacego ciała w polu grawitacyjnym. W ustalonych chwilach czasowych $t_1,\ t_2, ..., t_n$ mierzymy drogę przebyta przez spadajace ciało $s_1,\ s_2, ..., s_n$.

1. Na podstawie tych danych wyznacz metodą najmniejszych kwadratów estymator wartości przyspieszenia.
2. Jeśli dla $t_1 = 2[s], t_2 = 3[s]$ i $t_3 = 4[s]$ otrzymano $s_1 = 19[m], s_2 = 45[m]$ i $s_3 = 79[m]$ to jaka będzie dokładność oszacowania na podstawie estymatora otrzymanego w punkcie (1)?
3. Na podstawie danych zawartych w pliku **grawitacja** oszacuj wartość przyspieszenia ziemskiego.

Zadanie 6. Rozpatrzmy dane

$$(x_1, y_1),\ (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n),$$

gdzie $x_1, x_2, ..., x_n$ są nielosowe natomiast $y_1, y_2, ..., y_n$ są realizacjami zmiennych losowych zdefiniowanych jako

$$Y_i = e^{\alpha + \beta x_i} + U_i,$$

gdzie $U_1, U_2, ..., U_n,\ i = 1, 2, ..., n$, są niezaleznymi zmiennymi losowymi ze średną zero i wariancją σ^2.

Jak jest postać estymatora najmniejszych kwadratów dla parametrów α i β w tym modelu?