Zadania i problemy do wykładu *Estymacja parametrów*

Estymacja metodą największej wiarogodności

Zadanie 1. Rozpatrzmy następującą sytuację. Załóżmy, że mamy dwie symetryczne kostki do gry, D_1 z 5 czerwonymi ściankami i 1 białą ścianką oraz D_2 z 1 czerwoną ścianką i 5 białymi ściankami. Losujemy jedną z kostek i rzucamy nią aż do momentu wyrzucenia po raz pierwszy ścianki czerwonej. Tą samą kostką powtarzamy ten eksperyment jeszcze dwa razy. Załóżmy, że wyniki tych eksperymentów wyglądają w następujący sposób:

Pierwszy eksperyment:	czerwona ścianka pojawiła się po raz pierwszy w trzecim rzucie
Drugi eksperyment:	czerwona ścianka pojawiła się po raz pierwszy w piatym rzucie
Trzeci eksperyment:	czerwona ścianka pojawiła się po raz pierwszy w czwartym rzucie

Wykaż, że w przypadku kostki D_1 taki wynik może się zdarzyć z prawdopodobieństwem $5,7424 \times 10^{-8}$ natomiast w przypadku kostki D_2 z prawdopodobieństwem $8,9725 \times 10^{-4}$. Znając te prawdopodobieństw, jak sądzisz, która kostka została wylosowana do tego eksperymentu?

Zadanie 2. Rzucamy niesymetryczną monetą aż do momentu pojawienia się po raz pierwszy orła. Powtarzamy ten eksperyment z ta samą monetą trzy razy i otrzymujemy następujące wyniki:

Pierwszy eksperyment:	orzeł pojawia się po raz pierwszy w trzecim rzucie
Drugi eksperyment:	orzeł pojawia się po raz pierwszy w piątym rzucie
Trzeci eksperyment:	orzeł pojawia się po raz pierwszy w czwartym rzucie

Niech p oznacza prawdopodobieństwo wyrzucenia orła w pojedynczym rzucie tą monetą. Wyznacz estymator największej wiarogodności parametru p?

Zadanie 3. Liczbę zgłoszeń w jednostce czasu do serwera można modelować przy pomocy rozkładu Poissona. Niech $x_1, x_2, ..., x_n$ będzie realizacją próby losowej z rozkładu Poissona z parametrem μ.

1. Pokaż, że funkcja wiarogodności $L(\mu)$ jest zadana przez
$$L(\mu) = \frac{e^{-n\mu}}{x_1! \cdots x_n!} \mu^{x_1+x_2+\ldots+x_n}.$$
2. Policz logarytm funkcji wiarogodności oraz podaj postać estymatora największej wiarogodności parametru μ.
3. Jaką postać ma estymator największej wiarogodności prawdopodobieństwa zera w rozkładzie Poissona z parametrem μ.

Zadanie 4. Niech $x_1, x_2, ..., x_n$ będzie realizacją próby losowej z rozkładu normalnego.

1. Dla rozkładu normalnego o gęstości
$$f(x|\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}},$$
wyznacz estymator największej wiarogodności parametru μ.

2. Dla rozkładu normalnego o gęstości

$$f(x|\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}},$$

wyznacz estymator największej wiarogodności parametru σ.

Zadanie 5. Początkujący łucznik strzela n razy do okrągłej tarczy o nieznanym promieniu τ. Trafia do tarczy za każdym razem, ale w zupełnie losowe miejsca. Niech $r_1, r_2, ..., r_n$ oznaczają odległości miejsc poszczególnych trafień od środka tarczy. Wyznacz estymator największej wiarygodności parametru τ.

Krzysztof Topolski