

Zadania i problemy do wykładu *Estymacja parametrów*

Estymatory nieobciążone.

Zadanie 1. Niech x_1, x_2, \dots, x_n oraz y_1, y_2, \dots, y_m będą realizacjami dwóch prób, natomiast \bar{x} oraz \bar{y} ich średnimi próbkowymi.

1. Czy prawda jest, że

$$\frac{\bar{x} + \bar{y}}{2},$$

jest średnią próbkową próby połączonej $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m$?

2. Czy prawda jest, że

$$\frac{\bar{x} + \bar{y}}{2},$$

jest średnią próbkową próby połączonej $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m$, w sytuacji gdy $n = m$?

Zadanie 2. Niech X_1, X_2, \dots, X_n będą zmiennymi losowymi o tej samej wartości oczekiwanej μ .

1. Czy $S = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{3}X_2 + \frac{1}{6}X_3$ jest nieobciążonym estymatorem dla μ ?

2. Jakie warunki muszą spełniać stałe a_1, a_2, \dots, a_n , aby statystyka

$$T = a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_nX_n,$$

była nieobciążonym estymatorem dla μ ?

3. Przy jakich warunkach na stałe a i b , statystyka

$$M = a(X_1 + X_2 + \dots + X_n) + b,$$

jest nieobciążonym estymatorem dla μ ?

4. Czy \sqrt{T} jest nieobciążonym estymatorem dla θ ? Jeśli nie, to czy ma on dodatnie czy ujemne obciążenie?

Zadanie 3. Z pewnej populacji o rozkładzie z wartością oczekiwaną μ oraz wariancją σ^2 wylosowano dwie próbki i dla każdej z nich obliczono średnią.

Próbka	Wielkość próbki	Średnia
1	$n_1 = 10$	\bar{x}_1
2	$n_2 = 20$	\bar{x}_2

- (i) Który z następujących dwóch estymatorów:

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{2}(\bar{X}_1 + \bar{X}_2) \quad \text{czy} \quad \hat{\mu}_2 = \frac{1}{3}\bar{X}_1 + \frac{2}{3}\bar{X}_2$$

przyjąć za ocenę wartości średniej μ ?

- (ii) Jak ocenić wariancję tych estymatorów?

- (iii) Czy istnieje najlepszy nieobciążony estymator postaci $a_1\bar{X}_1 + a_2\bar{X}_2$?

Zadanie 4. Niech X_1, X_2, \dots, X_n będzie próba losową z rozkładu jednostajnego na odcinku $[-\theta, \theta]$ z nieznaną wartością parametru θ .

1. Wykaż, że

$$T = \frac{3}{n}(X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2)$$

jest nieobciążonym estymatorem dla θ^2 .

2. Czy \sqrt{T} jest nieobciążonym estymatorem dla θ ? Jeśli nie, to czy ma on dodatnie czy ujemne obciążenie?

Krzysztof Topolski