

Zadania i problemy do wykładu *Testowanie hipotez statystycznych*

(ZESTAW NR 2)

ZADANIA

Zadanie 1. W 1000 niezależnych rzutach monetą pojawiło się 560 orłów i 440 reszek. Czy można uznać, że moneta ta jest symetryczna? Uzasadnij swoją odpowiedź.

Zadanie 2. W pewnym mieście liczbę wypadków samochodowych w danym roku można opisać za pomocą rozkładu Poissona. W zeszłych latach średnia liczba wypadków w ciągu roku była równa 15 natomiast w obecnym roku wydarzyło się 10 wypadków. Czy można przyjąć, że liczba wypadków w tym mieście zmniejszyła się?

Zadanie 3. Na podstawie próby losowej $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ z rozkładu Bernoulliego z parametrem p testujemy hipotezę

$$H_0 : p = 0,49$$

przeciwko hipotezie

$$H_1 : p = 0,51.$$

Test odrzuca hipotezę zerową H_0 , gdy $\sum_{i=1}^n X_i$ jest duża. Korzystając z Centralnego Twierdzenia Granicznego wyznacz przybliżony rozmiar próby potrzebny aby prawdopodobieństwa błędów I i II rodzaju były oba mniejsze niż 0,01.

Zadanie 4. Zmienna losowa X ma rozkład o gęstości

$$f(x|\theta) = \theta x^{\theta-1} \mathbb{I}_{(0,1)}(x),$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Należy przetestować hipotezę

$$H_0 : \theta = 1,$$

przy hipotezie alternatywnej

$$H_1 : \theta = 2.$$

Ustalono liczbę $0 < c < 1$. Procedura testowa polega na odrzuceniu hipotezy zerowej, jeśli $X > c$; w przeciwnym przypadku hipotezę zerową należy przyjąć.

(i) Oblicz prawdopodobieństwo błędu pierwszego rodzaju.

(ii) Oblicz prawdopodobieństwo błędu drugiego rodzaju.

(iii) Wyznacz wartość c , przy której suma prawdopodobieństw pierwszego i drugiego rodzaju jest najmniejsza.

Zadanie 5. Niech $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ będzie próbą z rozkładu wykładniczego o gęstości

$$f(x|\theta) = \exp\{-(x - \theta)\} \quad \text{dla } x \geq \theta \quad \text{oraz } f(x) = 0 \quad \text{dla } x < \theta.$$

Podaj postać testu ilorazu wiarygodności dla testowania hipotezy

$$H_0 : \theta \leq \theta_0$$

przeciwko hipotezie

$$H_1 : \theta > \theta_0,$$

gdzie θ_0 jest ustalone przez eksperymentatora.