
ZADANIA

Zadanie 1. Załóżmy, że zmienna Y jest funkcją liniową zmiennej losowej X :

$$Y = \alpha + \beta X$$

gdzie α i β są stałymi. Załóżmy, że Z jest trzecią zmienną. Pokaż, że

- (a) korelacje spełniają równość $\rho_{XZ} = \rho_{YZ}$,
- (b) próbkowa funkcja korelacji spełnia równość $\hat{\rho}_{XZ} = \hat{\rho}_{YZ}$.

Zadanie 2. Niech $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ będzie próbą losową z rozkładu o wartości oczekiwanej μ . Pokaż, że warunkiem koniecznym i dostatecznym na to by statystyka

$$T = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_n X_n$$

była nieobciążonym estymatorem μ , jest warunek

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1.$$

Zadanie 3. Generujemy próbę losową $(X_1, X_2, \dots, X_n)$, z rozkładu o wartości oczekiwanej μ i wariancji σ^2 . Czy dla średniej próbkowej $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ prawdziwa jest zbieżność

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\bar{X}_n} = \frac{1}{\mu}?$$

Zadanie 4. Niech $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ będzie próbą losową z rozkładu jednostajnego $U(\theta-1, \theta+1)$. Wyznacz estymator największej wiarygodności parametru θ .

Zadanie 5. Niech $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ będzie próbą losową z rozkładu normalnego $N(\mu, \sigma^2)$. Wyznacz estymator największej wiarygodności parametru $\theta = (\mu, \sigma^2)$.

Zadanie 6. Niech $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ będzie próbą losową z rozkładu jednostajnego $U(0, \theta)$. Do oszacowania nieznanego parametru θ stosujemy następujące trzy estymatory,

- (a) dwukrotność średniej z próby,
- (b) największą wartość w próbie,
- (c) sumę największej i najmniejszej wartości w próbie.

Sprawdź czy te estymatory są nieobciążone oraz czy są zgodne.

Zadanie 7. Niech $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ będzie próbą losową z rozkładu normalnego $N(0, 1)$.

(a) Wyznacz postać gęstości statystyki $T_2 = X_1^2 + X_2^2$.

(b) Podaj postać rozkładu statystyki $T_n = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2$.

Zadanie 8. Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach, odpowiednio normalnym $N(0, 1)$ i chi kwadrat z n stopniami swobody $\chi^2(n)$. Wyznacz rozkład zmiennej losowej T , zdefiniowanej jako

$$T = \frac{\sqrt{n}X}{\sqrt{Y}}.$$

Krzysztof Topolski