
ZADANIA

Zadanie 1. Profesor E.Z. Shortcuts zdecydował, że estymator najmniejszych kwadratów jest zbyt kłopotliwy w obliczeniach. Zauważając, że dwa punkty określają jednoznacznie prostą, prof. Stuff wybierał dwa punkty z próbki rozmiar N i wykreślił linię między nimi, nazywając nachylenie tej prostej estymatorem EZ parametru β_2 prostej regresji. Algebraicznie, jeśli wybrane dwa punkty to (x_1, y_1) i (x_2, y_2) , reguła estymacji EZ wybrana przez prof. Shortcutsa to

$$b_{EZ} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Zakładając, że wszystkie założenia modelu regresji są spełnione:

- (a) Pokaż, że b_{EZ} jest estymatorem „liniowym”.
- (b) Pokaż, że b_{EZ} jest nieobciążonym estymatorem β_2 .
- (c) Wyznacz estymatora wariancję b_{EZ} .
- (d) Znajdź rozkład prawdopodobieństwa b_{EZ} .
- (e) Przekonaj profesora Shortcutsa, że estymator EZ nie jest tak dobry jak estymator wyznaczony metodą najmniejszych kwadratów.

Zadanie 2. Rozważmy model regresji liniowej postaci

$$y = x^T \beta + e, \quad E[e|x] = 0, \quad E[e^2|x] = \sigma^2,$$

gdzie x to $k_1 \times 1$ wektor obserwacji. Załóżmy, że można niektóre składniki błędu e , są obserwowalne, tak więc

$$e = z^T \gamma + \eta,$$

gdzie z_i jest wektorem $k_2 \times 1$ obserwowalnych składników takich, że $E[\eta|z] = 0$ i $E[xz^T] \neq 0$. Badacz chce wyestymować β oraz γ i rozważyć dwie alternatywy:

1. Dokonuje regresji y na x i z , aby wyznaczyć metodą najmniejszych kwadratów estymatory $\hat{\beta}$ i $\hat{\gamma}$ parametrów β i γ .
2. Dokonuje regresji y na x , aby wyznaczyć metodą najmniejszych kwadratów estymator $\hat{\beta}$ i obliczyć $\hat{e} = y - x^T \hat{\beta}$ a następnie dokonuje regresji $\hat{e}$ na z , aby otrzymać estymator $\hat{\gamma}$ parametry γ .

Którą z tych dwóch metod poleciłbyś z punktu widzenia własności zgodności estymatorów $\hat{\beta}$ i $\hat{\gamma}$? W przypadku metody, która daje estymator zgodny wyznacz rozkład graniczny dla $\sqrt{n}(\hat{\gamma} - \gamma)$.

Zadanie 3. Rozważ następujący model regresji:

$$y = \beta x + \alpha z + u;$$

gdzie α i β są nieznanymi skalarnymi parametrami natomiast błąd u ma rozkład ze średnią zero i wariancją równą jeden. Dodatkowo zakładamy, że para (x, z) jest niezależna od u i

$$E[x^2] = \gamma_x^2 \neq 0, \quad E[xz] = \gamma_{xz} \neq 0.$$

Zbiór ciąg trójek $\{(x_i, z_i, y_i)\}_{i=1}^n$ jest próbą losową. Załóżmy, że mamy dany estymator $\hat{\alpha}$ parametru α , niezależny od wszystkich u_i , dla którego rozkład graniczny $\sqrt{n}(\hat{\alpha} - \alpha)$, gdy $n \rightarrow \infty$ to $N(0, 1)$. Definiujemy estymator *beta* parametru β postaci

$$\hat{\beta} = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{-1} \sum_{i=1}^n x_i (y_i - \hat{\alpha} z_i).$$

Wyznacz rozkład asymptotyczny dla $\hat{\beta}$, gdy $n \rightarrow \infty$.

Zadanie 4. Rozważmy równanie $y = (\alpha + \beta x)e$, gdzie y i x są obserwowalnymi skalarnymi, natomiast e jest nieobserwowalne. Zakładamy, że

$$E[e|x] = 1, \quad \text{oraz} \quad \text{Var}[e|x] = 1.$$

Jak dokonać estymacji (α, β) , metodą najmniejszych kwadratów? Jak proponujesz estymować wariancję $\hat{\beta}$?

Zadanie 5. Niech $\{y_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ będzie stacjonarnym i ergodycznym procesem stochastycznym z zerową średnią i skończoną wariancją.

(i) Definiujemy

$$\beta = \frac{\text{Cov}[y_n, y_{n-1}]}{\text{Var}[y_n]}, \quad u_n = y_n - \beta y_{n-1}.$$

Możemy wtedy napisać

$$y_n = \beta y_{n-1} + u_n.$$

Wykaż, że dla błędu u_n , $E[u_n] = 0$ i $\text{Cov}[u_n, y_{n-1}] = 0$

- (ii) Pokaż, że estymator najmniejszych kwadratów $\hat{\beta}$ dla regresji y_n na y_{n-1} jest zgodnym estymatorem β .
- (iii) Pokaż, że bez dodatkowych założeń, zmienne u_n , są parami skorelowane. Skonstruuj przykład aby to pokazać.
- (iv) Jeden z artykułów opublikowanych w *Journal of Econometrics* prowadzi do stwierdzenia: „Dobrze to wiadomo, że w modelach regresji liniowej z opóźnionymi zmiennymi zależnymi zwykle estymatory wyznaczone metodą najmniejszych kwadratów nie są zgodne, jeśli błędy są skorelowane”. To stwierdzenie lub jego wersja pojawiają się praktycznie we wszystkich podręcznikach ekonometrii. Skomentuj to stwierdzenie w świetle wyników dla podpunktów (ii) i (iii). zadania.