
ZADANIA

Zadanie 1. Niech $X(t)$ będzie gaussowskim procesem losowym ze średnią $E[X(t)] = 0$ i funkcja autokorelacji $R_X(h) = \exp(-|h|)$. Zmienna losowa A jest zdefiniowany w następujący sposób:

$$A = \int_0^1 X(t)dt.$$

Wyznacz średnią $E(A)$ i wariancję $Var(A)$ zmiennej losowej A .

Zadanie 2. Niech $X(t)$ będzie gaussowskim procesem losowym ze średnią $E[X(t)] = 0$ i funkcja autokorelacji $R_X(h) = \exp(-|h|)$. Zmienna losowa A jest zdefiniowany w następujący sposób:

$$A = \int_0^B X(t)dt.$$

gdzie B jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na odcinku $[1, 5]$ i niezależną od procesu losowego $X(t)$. Wyznacz średnią $E(A)$ i wariancję $Var(A)$ zmiennej losowej A .

Zadanie 3. Niech S_n , $n = 0, 1, 2, \dots$ będzie ciągiem zmiennych losowych zdefiniowanych w następujący sposób:

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k, \quad n \geq 1 \quad \text{oraz} \quad S_0 = 0,$$

gdzie $\{X_k\}_1^\infty$ jest ciągiem *i.i.d* zmiennych losowych, dla których

$$P\{X_k = 1\} = p \quad \text{oraz} \quad P\{X_k = -1\} = 1 - p.$$

Rozpatrzmy proces losowy $\{S_n : n \geq 1\}$.

- (i) Dla jakich wartości p proces $\{S_n\}$ jest martyngałem?
- (ii) Dla jakich wartości p proces $\{S_n\}$ jest submartyngałem?
- (iii) Dla jakich wartości p proces $\{S_n\}$ jest supermartyngałem?

Zadanie 4. Niech $X_0 = 0$ natomiast $\{X_k\}_1^\infty$ będzie ciągiem *i.i.d* zmiennych losowych ze średnią $EX_k = 0$ i skończona wariancją $Var X_k = \sigma^2$ dla $k \geq 1$. Niech $Y_0 = 0$ i zdefiniujmy

$$Y_k = \left(\sum_{i=1}^k X_i \right)^2 - k\sigma^2, \quad k \geq 1.$$

Wykaż, że proces $\{Y_n\}$ jest martyngałem.

Zadanie 5. Niech X będzie dyskretną zmienną losową. Funkcja generująca zmiennej losowej X jest zdefiniowana dla $|s| < 1$ w następujący sposób

$$g_X(s) = E(s^X) = \sum_{n \geq 0} s^n P(X = n).$$

(a) Pokaż, że funkcja generująca jednoznacznie określa rozkład, czyli że jeśli X i Y są zmiennymi losowymi, dla których równość $g_X(s) = g_Y(s)$ zachodzi dla każdego $|s| < 1$, to X i Y mają ten sam rozkład.

(b) Załóżmy, że zmienne losowe X i Y są niezależnymi zmiennymi losowymi wtedy

$$g_{X+Y}(s) = g_X(s)g_Y(s).$$

Zadanie 6. Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie geometrycznym z parametrem p .

(a) Pokaż, że dla $k \geq 1$,

$$P(X > k) = (1 - p)^k.$$

(b) Pokaż, że dla dowolnych $r, s \geq 0$ zachodzi równość

$$P(X > r + s | X > r) = P(X > s).$$

(c) Czy istnieje inny rozkład dyskretny posiadający własność braku pamięci opisana w punkcie (b)?

Zadanie 7.

(a) Wyznacz postać funkcji generującej zmiennej losowej o rozkładzie Bernoulliego z parametrem p .

(b) Korzystając z wyznaczonej w punkcie (a) postaci funkcji generującej pokaż, że funkcja generująca rozkładu dwumianowego z parametrami n i p jest postaci

$$(1 - p + ps)^n.$$

(c) Załóżmy, że zmienne losowe X i Y są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach dwumianowych z parametrami odpowiednio (n, p) i (m, p) . Pokaż, że zmienna losowa $X + Y$ jest zmienną losową o rozkładzie dwumianowym z parametrem $(n + m, p)$.

Zadanie 8. Rozpaczmy zmienną losową X z funkcją generującą

$$g_X(s) = \frac{1}{n+1} \frac{1 - s^{n+1}}{1 - s},$$

gdzie n jest ustaloną liczbą naturalną. Pokaż, że dla $k = 0, 1, \dots, n$, zachodzi równość

$$P(X = k) = \frac{1}{n+1}.$$

Zadanie 9. Wyznacz postać funkcji generującej zmiennej losowej o rozkładzie Poissona z parametrem λ .

- (a) Załóżmy, że zmienne losowe X i Y są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach Poissona z parametrami odpowiednio λ i μ . Pokaż, że zmienna losowa $X + Y$ jest zmienną losową o rozkładzie Poissona z parametrem $\lambda + \mu$.
- (b) Załóżmy, że zmienna losowa N ma rozkład Poissona z parametrem λ . Rozpatrzmy zmienną losową Y zdefiniowaną w następujący sposób

$$Y = \sum_{i=1}^N X_i,$$

gdzie $X_1, X_2, \dots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie Bernoulliego z parametrem p . Wykaż, że zmienna losowa Y ma rozkład Poissona z parametrem λp .

Zadanie 10. Niech N będzie dodatnią zmienną losową całkowitoliczbową. Niech $X_1, X_2, \dots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie. Rozpatrzmy zmienną losową Y zdefiniowaną w następujący sposób

$$Y = \sum_{i=1}^N X_i.$$

Pokaż, że prawdziwa jest następująca relacja między funkcjami generującymi zmiennych losowych N, X i Y

$$g_Y(s) = g_N(g_X(s)).$$

Zadanie 11. Niech N będzie dodatnią całkowitoliczbową zmienną losową o rozkładzie zadany przez ciąg $\{p_n\}_{n \geq 0}$. oznaczmy przez g_X funkcję generującą zmiennej losowej X .

- (a) Wykaż, że prawdziwa jest następująca równość

$$\frac{d^n}{ds^n} g_X(s) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\dots(k-n+1)s^{k-n}p_k.$$

- (b) Wykaż, że funkcja generująca $g_X(s)$ jest funkcją wypukłą dla $s \in [0, 1)$.

- (c) Zauważ, że

$$p_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{ds^n} g_X(s)|_{s=0}$$

co tłumaczy nazwę, *funkcja generująca prawdopodobieństwa*.