
ZADANIA

Zadanie 1. Począwszy od 6 rano, klienci przyjeżdżają do piekarni "Zakalec" według procesu Poissona w tempie 30 klientów na godzinę. Znajdź prawdopodobieństwo, że więcej niż 65 klientów przybędzie od 9 do 11 rano.

Zadanie 2. Kierownik piekarni "Zakalec" otrzymuje SMS-y z pretensjami od klientów od 10 rano z szybkością 10 SMS-ów na godzinę zgodnie z procesem Poissona. Znajdź prawdopodobieństwo, że kierownik otrzyma dokładnie 18 SMS-ów do południa i 70 SMS-ów do 17:00.

Zadanie 3. Występowanie huraganów na lądzie podczas zjawiska El Nino jest modelowane przy użyciu procesu Poissona (zobacz np. M. C. Bove et al. *Effect of El Nino on U.S. landfalling hurricanes, revisited*. Bulletin of the American Meteorological Society, 79(11), 1998, str. 2477-2482.) Autorzy twierdzą, że "podczas roku El Nino, prawdopodobieństwo, że dwa lub więcej huraganów pojawi się na lądzie to 28%." Wyznacz intensywność tego procesu Poissona.

Zadanie 4. Ania, Adam i Antoni stoją na początku trzech oddzielnych kolejek w bufecie czekając na obsłużenie. Obsługa w trzech kolejkach odbywa się niezależnie od siebie a momenty obsług tworzą odpowiednio procesy Poissona z parametrami 1, 2 i 3.

- (a) Znajdź prawdopodobieństwo, że Ania zostanie obsłużona jako pierwsza.
- (b) Znajdź prawdopodobieństwo, że Adam będzie obsłużony przed Anią.
- (c) Znajdź przewidywany czas oczekiwania na pierwszą obsłużoną osobę.

Zadanie 5. Załóżmy, że $X_1, X_2, \dots$ są zmiennymi losowymi i.i.d. z rozkładem wykładniczym z parametrem λ . Niech $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Pokaż, że S_n ma rozkład gamma z parametrami n i λ ,

- (a) korzystając na przykład z funkcji generujące momenty, lub transformaty Laplace'a,
- (b) korzystając z indukcji względem n .

Zadanie 6. Załóżmy, że $\{N(t), t \geq 0\}$ jest procesem Poissona z parametrem λ . Znajdź warunkowy rozkład $N(s)$ pod warunkiem, że $N(t) = n$, dla

- (a) $s < t$.
- (b) $s > t$.

Zadanie 7. Dla procesu Poissona z parametrem λ pokazano, że dla $s < t$, korelacja między zmiennymi $N(s)$ i $N(t)$ jest równa

$$\text{Cor}(N(s), N(t)) = \sqrt{\frac{s}{t}}.$$

Zadanie 8. Zakładamy, że bramki w meczu piłkarskim są zdobywane zgodnie z procesem Poissona. Średnia łączna liczba bramek zdobytych podczas 90-minut meczu to 2,68. Załóżmy, że grają z sobą dwie równorzędne drużyny. Użyj symulacji, aby oszacować prawdopodobieństwo że obie drużyn zdobędzie tę samą liczbę bramek. Porównaj otrzymany wynik z wynikiem teoretycznym.

Zadanie 9. Ania i Adam dojeżdżają na uczelnię tą samą linią autobusową. Autobusy docierają do przystanek na którym oboje wsiadają zgodnie z procesem Poissona z parametrem $\lambda = 1/30$. Pewnego dnia Ania pechowo pojawia się na przystanku, gdy autobus właśnie opuszcza przystanek. Adam pojawia się na przystanku 10 minut po Ani. Policz średni czas czekania na autobus dla Ani i Adama.

Uwaga. W celu nabrania intuicji wykonaj poniższy program.

program R symulujący czasu czekania

```
# autobus.R
> proba <- 5000
> ania <- numeric(proba)
> adam <- numeric(proba)
> for (i in 1:proba)
+   autobus <- rexp(1,1/30)
+   ania[i] <- autobus
+   while (autobus < 10) autobus <- autobus + rexp(1,1/30)
+   adam[i] <- autobus-10
> mean(ania)
> mean(adam)
> hist(Ania,xlab="Ania",prob=T,ylab="",main="")
> hist(Adam,xlab="Adam",prob=T,ylab="",main="")
```

Zadanie 10. Załóżmy, że $\{N_1(t), t \geq 0\}$ i $\{N_2(t), t \geq 0\}$ są niezależnymi procesami Poissona z parametrem odpowiednio λ_1 i λ_2 . Wykaż, że proces $\{N_1(t) + N_2(t), t \geq 0\}$ jest procesem Poissona z parametrem $\lambda_1 + \lambda_2$.

PROBLEMY

Problem 1. Napisz program symulujący proces Poissona.

Problem 2. Zastanów się czy następujący program w R symuluje proces kolejne punkty procesu Poisson z parametrem $\lambda = 1/2$ na odcinku $[0, 30]$.

```
# poissons.R
> t <- 30
> lambda <- 1/2
> N <- rpois(1, lambda*t)
> unifs <- runif(N, 0, t)
> arrivals <- sort(unifs)
> arrivals
```

Uwaga. Zastanów się jaki rozkład łączny ma wektor $(S_1, S_2, \dots, S_n)$ kolejnych zgłoszeń w procesie Poissona $\{N_t, t \geq 0\}$, pod warunkiem, że $N(t) = n$. Uzasadnij, że rozkład ten jest taki sam jak rozkład wektora statystyk pozycyjnych dla n niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie jednostajnym na odcinku $[0, t]$.

Problem 3. Uczestnicy koncertu jazzowego przybywają na koncert zgodnie z procesem Poissona z parametrem λ . Zespół zaczyna grać w chwili t . Osoba, która przybędzie w odcinku czasu $[0, t]$, czeka $t - S$ jednostek czasu na rozpoczęcie koncertu, gdzie S jest momentem jego przybycia. Znaleźć przewidywany całkowity czas oczekiwania wszystkich uczestników koncertu, którzy przybywają przed rozpoczęciem koncertu.

Problem 4. Złożony proces Poissona $\{C(t), t \geq 0\}$ jest zdefiniowany jako

$$C(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} X_k,$$

gdzie $\{N(t), t \geq 0\}$ jest procesem Poissona, a $X_1, X_2, \dots$ to zmienne losowe i.i.d. niezależne od procesu $\{N(t)\}$.

Założmy, że wypadki samochodowe zdarzające się na niebezpiecznym skrzyżowaniu zgodnie procesem Poissona w tempie 3 wypadków na tydzień. Ponadto liczba osób ciężko rannych w wypadku ma rozkład Poissona ze średnią 2. Pokaż, że proces poważnych obrażeń jest złożonym procesem Poisson i znajdź średnią i odchylenie standardowe liczby poważnych urazy powyżej 1 roku.