
ZADANIA

Zadanie 1. Wykaż, że zachodzą następujące równości

(a)

$$\binom{n-1}{\frac{n+s}{2}-1} - \binom{n-1}{\frac{n+s}{2}} = \frac{s}{n} \binom{n}{\frac{n+s}{2}},$$

(b)

$$\frac{1}{2^{2n-1}} \binom{2n-1}{n} = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}.$$

Zadanie 2. Dla prostego błądzenia losowego $\{S_n\}_{n \geq 0}$, oznaczmy przez u_{2n} oraz f_{2n} odpowiednio prawdopodobieństwo powrotu do zera w chwili $2n$, $u_{2n} = P(S_{2n} = 0 | S_0 = 0)$ i prawdopodobieństwo pierwszego powrotu do zera w chwili $2n$.

(a) Pokaż, że dla $n \geq 1$,

$$f_{2n} = \frac{1}{2n-1} u_{2n},$$

(b) Dla jakiego n zachodzi równość $u_{2n} = f_{2n}$?

Zadanie 3. Niech n i k będą dodatnimi liczbami całkowitymi takimi, że $1 \leq k \leq n$. Pokaż, że

(a) $P(S_{2n} = 0 | S_0 = 0) \geq P(S_{2n} = 0, S_{2k} = 0 | S_0 = 0)$,

(b) $P(S_{2n} = 0, S_{2k} = 0 | S_0 = 0) \geq P(S_{2n-2k} = 0 | S_0 = 0) P(S_{2k} = 0 | S_0 = 0)$.

(c) Korzystając z (a) i (b) wykaż, że $u_{2n} \geq u_{2n-2k} u_{2k}$.

Zadanie 4. Oznaczmy przez L_{2n} moment ostatniego powrotu prostego błądzenia losowego do zera do chwili $2n$. Dla nieparzystego n pokaż, że

$$P(L_{2n} < n) = P(L_{2n} > n) = \frac{1}{2}.$$

Zadanie 5. Pokaż, że dla prostego błądzenia losowego średnia liczba wizyt w $a > 0$, zanim błądzenie wróci do 0, jest równa 1.

Zadanie 6. Dla prostego błądzenia losowego $\{S_n\}_{n \geq 0}$ niech V_n oznacza liczbę wizyt w 0 do chwili n czyli, $V_n = \#\{1 \leq k \leq n : S_k = 0\}$. Pokaż, że istnieje stała $c > 0$ taka, że dla wszystkich n zachodzi nierówność,

$$E[V_n] > c\sqrt{n}.$$

Zadanie 7. Niech błądzenie losowe $\{S_n\}_{n \geq 0}$ będzie określony w następujący sposób

$$S_n = x + \sum_{i=1}^n U_i,$$

gdzie x to ustalona liczba całkowita, a $\{U_i\}_{i \leq 1}$ to ciąg i.i.d zmiennych losowych o rozkładzie $P(U_i = +1) = P(U_i = -1) = 1/2$.

- (a) Pokaż, że prawdopodobieństwo p_x , że błądzenie losowe osiągnie 0 zanim osiągnie N , startując z $x \geq 1$ jest równe

$$p_x = \frac{N - x}{N}.$$

- (b) Pokaż, że startując z 0 błądzenie osiągnie $a > 0$ zanim osiągnie $-b < 0$ jest równe

$$\frac{a}{a + b}$$

Zadanie 8. Rozpatrzmy "leniwe" błądzenie losowe, dla którego przyrosty mają rozkład

$$P(U_i = 0) = P(U_i = +1) = P(U_i = -1) = \frac{1}{3}.$$

- (a) Wyznacz prawdopodobieństwo p_x , że błądzenie losowe osiągnie 0 zanim osiągnie N , startując z $x \geq 1$ jest równe

$$p_x = \frac{N - x}{N}.$$

- (b) Wyznacz prawdopodobieństwo osiągnięcia przez leniwe błądzenie losowe $a > 0$ zanim osiągnie ono $-b < 0$ gdy startuje z 0.

- (c) Wyznacz prawdopodobieństwo, że startując z 0 leniwe błądzenie losowe osiągnie $a > 0$ zanim powróci do 0.

Krzysztof Topolski