
ZADANIA

Zadanie 1. Rozpatrzmy proces gałązkowy dla którego $Z_0 = 1$, a zmienna losowa X opisująca liczbę potomków ma rozkład postaci

$$p_k = ab^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

i

$$p_0 = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} p_k,$$

gdzie $0 < b < a + b < 1$.

(a) Pokaż, że funkcja generująca spełnia równość

$$f_X(s) = \frac{1 + (a + b)}{1 - b} + \frac{at}{1 - bt}.$$

(b) Załóżmy, że $a > (b - 1)^2$. Wyznacz granicę $\lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n = 0)$.

Zadanie 2. Rozpatrzmy proces gałązkowy dla którego $Z_0 = 1$, a zmienna losowa X opisująca liczbę potomków ma rozkład Poisson

$$p_k = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

(a) Wyznacz funkcję generującą $f_X(s)$, a następnie średnią i wariancję Z_n .

(b) Dla $\lambda = 1, 5$ oraz $\lambda = 2$ wyznacz granicę $\lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n = 0)$.

Zadanie 3. Rozpatrzmy proces gałązkowy dla którego $Z_0 = 1$, a zmienna losowa X opisująca liczbę potomków ma rozkład geometryczny postaci

$$P(X = k) = (1 - p)p^k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad \text{gdzie } 0 < p < 1.$$

Wyznacz prawdopodobieństwo wymarcia dla tak zdefiniowanego procesu.

Zadanie 4. Rozpatrzmy proces gałązkowy dla którego $Z_0 = 1$, a rozkład liczby potomków ma średnią $m > 0$. Pokaż, że

$$E[Z_{n+k} | Z_n] = m^k Z_n.$$

Zadanie 5. Rozpatrzmy proces gałązkowy dla którego $Z_0 = 1$, a zmienna losowa X opisująca liczbę potomków ma rozkład postaci

$$p_k = (1 - r)r^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

gdzie $r \in (0, 1)$.

- (a) Niech g będzie funkcją generującą liczby wszystkich potomków dla procesu startującego z jednego osobnika. Wyznacz postać funkcji $g(s)$.
- (b) Korzystając z wyznaczonej w punkcie (a) postaci funkcji generującej wyznacz rozkład prawdopodobieństwa liczby wszystkich potomków.
- (c) Dla jakich wartości r zmienna losowa X , liczby wszystkich potomków ma właściwy rozkład prawdopodobieństwa?
- (d) Pokaż, że
- $$P(X = n | Z_0 = 1) = \frac{1}{2r} c_n 4^n (1 - r)^n r^n.$$
- (e) Dla $r = 1/4$ wyznacz wartości $P(X = n)$ gdy $n = 1, 2, \dots, 10$.
- (f) Dla $r = 3/4$ wyznacz wartości $P(X = n)$ gdy $n = 1, 2, \dots, 10$.

Zadanie 6. Rozpatrzmy proces gałązkowy zdefiniowany w zadaniu 5. Zakładamy, że proces ten opisuje rozwój populacji i zakładamy dodatkowo, że każdy nowonarodzony osobnik może, niezależnie od pozostałych, podlegać z prawdopodobieństwem μ mutacji. Niech M^c oznacz zdarzenie, że mutacja nie pojawi się w populacji startującej z pojedynczego osobnika.

- (a) Pokaż, że

$$P(M^c | Z_0 = 1) = \sum_{n \geq 1} P(X = n | Z_0 = 1) (1 - \mu)^{n-1},$$

gdzie X to całkowita liczba potomków.

- (b) Korzystając z zadania 5 (d) wyznacz $P(M^c | Z_0 = 1)$.
- (c) Uzasadnij, że dla dowolnego $N \geq 1$

$$P(M^c | Z_0 = N) = P(M^c | Z_0 = 1)^N$$

i policz wartość tego prawdopodobieństwa dla kilku wartości N i μ dla których $N\mu = 1$.

- (d) Przyjmijmy, że $r = 6/10$ i $N = 10$. Policz $P(M^c | Z_0 = N)$ dla $\mu = 10^{-4}$, $\mu = 10^{-5}$ i dla $\mu = 10^{-6}$.

PROBLEMY

Problem 1. Korzystając z następującego skryptu w R symulującego proces gałązkowy sprawdź symulacyjnie prawdziwość twierdzenia dotyczącego prawdopodobieństwa wymarcia w procesie gałązkowym BGW.

```

# BGW.R
# Proces galazkowy
### Poissonowski rozkład liczby potomkow
branch <- function(n,lam) ## Poisson
z <- c(1,rep(0,n))
for (i in 2:(n+1))
z[i] <- sum(rpois(z[i-1],lam))

return(z)

### Geometryczny rozkład liczby potomkow
branch <- function(n,p)
z <- c(1,rep(0,n))
for (i in 2:(n+1))
z[i] <- sum(rgeom(z[i-1],p))

return(z)
### Przykład
branch(10,1/4)
replicate(5, branch(10,1/4))
n <- 5000
simlist <- replicate(n, branch(10,1/4)[11])
sum(simlist==0)/n
branch(10,1/4)
curve((1-sqrt(1-4*x*(1-x)))/(2*(1-x)),0,1/2,xlab="p",
ylab="Prawdopodobienstwo wymarcia")

```

Krzysztof Topolski