

Zadania i problemy do wykładu *Modelowanie stochastyczne*
(ZESTAW NR 5)

ZADANIA

Zadanie 1. Rozważmy proste błądzenie losowe $S_n = X_1 + \dots + X_n$, rozpoczynające się od $S_0 = 0$, z niezależnymi krokami o tym samym rozkładzie postaci

$$P(X_1 = 1) = p, \quad P(X_1 = -1) = q, \quad p + q = 1.$$

(i) Pokaż, że

$$E(S_m | S_n) = \begin{cases} \frac{m}{n} S_n, & \text{gdy } m \leq n \\ S_n, & \text{gdy } m > n. \end{cases}$$

(b) Czy dziwi Cię fakt, że odpowiedź nie zależy od p ?

(c) Wyjaśnij, dlaczego gdy $p > q$, to $P(\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty) = 1$,
i podobnie gdy $p < q$, to $P(\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = -\infty) = 1$.

(c) Co możesz powiedzieć o asymptotycznym zachowaniu S_n , gdy $n \rightarrow \infty$, w sytuacji gdy $p = \frac{1}{2}$?

Zadanie 2. Załóżmy, że możesz wchodzić po po schodach pokonując jeden lub dwa stopnie naraz. W sumie jest n stopni do pokonania. Na ile sposobów możesz pokonać wszystkie stopnie?

Zadanie 3. Rozważmy proste błądzenie losowe $\{S_n, n \geq 0\}$. Zdefiniujmy następujące procesy:

$$\begin{aligned} X_n &= S_{2n}, \quad n \geq 0, \\ Y_n &= S_{2n+1}, \quad n \geq 0, \\ Z_n &= \exp S_n, \quad n \geq 0. \end{aligned}$$

Określ $\mathcal{S}$, przestrzeń stanów każdego z tak zdefiniowanych procesów, a następnie dla $x, y \in \mathcal{S}$, wyznacz prawdopodobieństwa

$$P(H_{n+1} = y | H_n = x), \quad \text{gdzie } H \text{ jest jednym z procesów } X, Y, Z.$$

Zadanie 4. Rozpatrzy proste błądzenie losowe $\{S_n, n \geq 0\}$, które staruje z zera, $S_0 = 0$.

(i) Pokaż, że gdy $p = \frac{1}{2}$ to błądzenie losowe wraca do zera z prawdopodobieństwem 1.

(iii) Czy jest to prawdą gdy $p \neq \frac{1}{2}$?

Zadanie 5. Rozpatrzy błądzenie losowe $\{\mathbf{S}_n, n \geq 0\}$, na kracie $\mathbf{Z}^k$ liczb całkowitych, czyli proces zdefiniowany jako

$$\mathbf{S}_n = (S_n^{(1)}, 0, \dots, 0) + (0, S_n^{(2)}, 0, \dots, 0) + \dots + (0, \dots, 0, S_n^{(k)}),$$

gdzie $S^{(1)}, S^{(2)}, \dots, S^{(k)}$ są niezależnymi kopiami prostego błądzenia losowego na liczbach całkowitych $\mathbf{Z}$.

- (i) Pokaż, że gdy $k = 2$ i $p = \frac{1}{2}$ to błądzenie losowe $\mathbf{S}_n$ wraca do zera z prawdopodobieństwem 1.
- (ii) Czy jest to prawdą gdy $p \neq \frac{1}{2}$?
- (iii) Pokaż, że gdy $k \geq 3$ to błądzenie losowe $\mathbf{S}_n$ może z dodatnim prawdopodobieństwem nie wrócić do zera.

Krzysztof Topolski