

Zadania i problemy do wykładu *Modelowanie stochastyczne*
(ZESTAW NR 6)

ZADANIA

Zadanie 1. Rozpatrzmy łańcucha Markowa z rozkładem początkowym $\alpha = (0.2, 0.3, 0.5)$ i macierzą prawdopodobieństw przejścia w jednym kroku postaci:

$$P = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.6 \\ 0 & 0.4 & 0.6 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Wyznacz

- (a) $P(X_7 = 3 \mid X_6 = 2)$,
- (a) $P(X_9 = 2 \mid X_1 = 2, X_5 = 1, X_7 = 3)$,
- (a) $P(X_0 = 3 \mid X_1 = 1)$
- (a) $E(X_2)$

Zadanie 2. (Model Wrighta-Fishera). Model Wrighta-Fishera opisuje model ewolucji w czasie ustalonej populacji k genów. Geny mogą być jednego z dwóch typów, zwanych allelami, **A** lub **a**. Niech X_n oznacza liczbę alleli **A** w n -tym pokoleniu. W modelu liczbę alleli **A** w $(n + 1)$ -pokoleniu uzyskuje się przez losowanie ze zwracaniem genu z populacji genów w n -tym pokoleniu. Tak więc, pod warunkiem istnienia i alleli typu **A** w n -tym pokoleniu, liczba alleli **A** w $(n + 1)$ -szym pokoleniu ma rozkład dwumianowy z parametrami k i $p = \frac{i}{k}$. Przy tych założeniach zmienne losowe $\{X_n\}$ tworzą łańcuch Markowa z macierzą przejścia określoną przez

$$P_{ij} = \binom{k}{j} \left(\frac{i}{k}\right)^j \left(1 - \frac{i}{k}\right)^{k-j}, \quad \text{dla } 0 \leq i, j \leq k.$$

Zauważ, że $P_{00} = P_{kk} = 1$. Wraz z kolejnymi generacjami skład genetyczny populacji zbliża się do stanu w którym wszystkie allele są typu **a** lub wszystkie allele są typu **A**. Interesujące jest pytanie, jakie jest prawdopodobieństwo, że populacja ewoluuje do stanu na wszystkie osobniki w populacji są typu **A**?

Rozważmy model Wright-Fisher z populacją $k = 3$ genów. Jeśli populacja początkowo ma jeden allel **A**, znajdź prawdopodobieństwo, że po trzech generacjach allelu **A** nie będzie.

Zadanie 3. Dla dwustanowego łańcucha Markowa $\{X_n, n \geq 0\}$, z macierzą przejścia

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}.$$

i rozkładem początkowym $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, wyznacz:

- (a) macierz przejścia w dwóch krokach,
- (b) rozkład procesu w pierwszym kroku.

Zadanie 4. Rozważ losowy spacer na $0, \dots, k$, który porusza się w lewo i prawo z odpowiednio z prawdopodobieństwami p i $1 - p$. Jeśli spacer jest w 0 , to w następnym kroku przechodzi do 1 . Jeśli natomiast spacer jest w k , to przechodzi do $k - 1$ w następnym kroku. Otrzymujemy w ten sposób spacer losowy z odbijającymi barierami w 0 i k . Załóżmy, że $k = 3$, $p = 3/4$ i rozkład początkowy jest jednostajny na $0, \dots, k$.

(a) Podaj postać macierzy prawdopodobieństw przejścia w jednym kroku.

(b) Wyznacz $P(X_7 = 1 \mid X_0 = 3, X_2 = 2, X_4 = 2)$.

(c) Wyznacz $P(X_3 = 1, X_5 = 3)$.

W razie potrzeby użyj komputera, jeśli to konieczne.

Zadanie 5. Kość czworościanu ma cztery ściany oznaczone odpowiednio 1, 2, 3 i 4. Rzucamy tą kostką, w sposób niezależny. Oznaczmy przez $R_0, R_1, \dots, R_n$ wyniki tych rzutów.

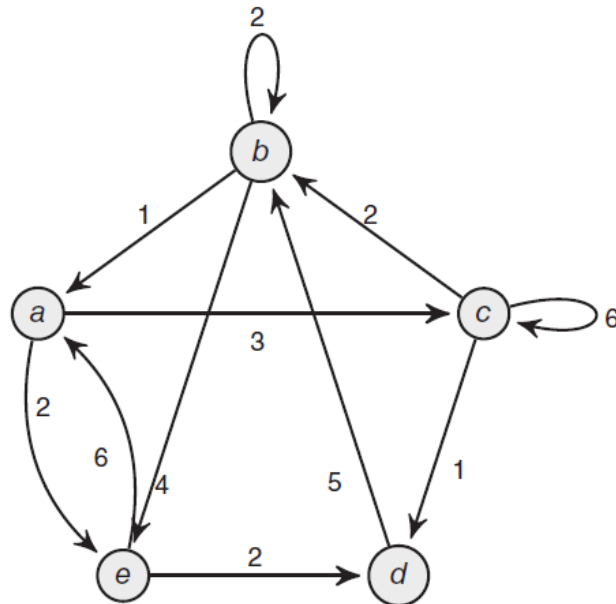
Niech $X_n = \max\{R_0, \dots, R_n\}$, dla $n \geq 0$, będą wartością maksymalną po $(n + 1)$ -rzutach.

(a) Podaj intuicyjny argument, dlaczego (X_n) , jest łańcuchem Markowa i wyznacz macierz prawdopodobieństw przejściową.

(b) Wyznacz $P(X_3 \geq 3)$.

Zadanie 6. $(X_n, n \geq 0)$ będzie łańcuchem Markowa z macierzą przejść $\mathbf{P}$. Niech $Y_n = X_{3n}$, dla $n = 0, 1, 2, \dots$. Wykaż, że $\{Y_n, n \geq 0\}$ jest łańcuchem Markowa i podaj postać macierzy przejść dla tak zdefiniowanego łańcucha.

Zadanie 7. Podaj macierz przejścia łańcucha Markowa opisanego przez skierowany graf ważony przedstawiony na rysunku 1.



Rysunek 1: Graf opisujący łańcuch Markowa.

Zadanie 8. Rozważmy łańcuch Markowa z macierzą przejścia

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 3/5 & 1/5 & 1/5 \\ 3/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Przedstaw postać skierowanego grafu ważonego opisującego przejścia dla tego łańcucha Markowa.

Zadanie 9. Zaczynasz od pięciu kości. Rzuć wszystkie kostki i odłóż te kości, na których pojawia się szóstką. Następnie rzuć pozostałymi kośćmi, odkładając kości, na których pojawia się szóstką, i tak dalej. Niech X_n będzie liczbą kości, które po n -rzutach dały w wyniku szóstkami.

- (a) Opisz macierz prawdopodobieństw przejść $\mathbf{P}$, dla tego łańcucha Markowa.
- (b) Znajdź prawdopodobieństwo zdobycia wszystkich szóstek po trzech rzutach.
- (c) Jakiej postaci macierzy przejść po 100 krokach $\mathbf{P}^{100}$ oczekujesz? Użyj komputera, aby zweryfikować swoją odpowiedź.

Zadanie 10. Dwie urny zawierają po k kul. Początkowo kule w lewej urnie są czerwone, a kule w prawej urnie są niebieskie. Na każdym kroku wybierz losowo kulę z każdej urny i zamień je. Niech X_n będzie liczbą niebieskich kulek w lewej urnie. Zauważ, że $X_0 = 0$ i $X_1 = 1$. Uzasadnij, że $\{X_n, n \geq 0\}$ jest łańcuchem Markowa i wyznacz macierz prawdopodobieństw przejść. Model ten nosi nazwę modelu Bernoulliego–Laplace’a dyfuzji i został wprowadzony przez Daniela Bernoulli w 1769 roku jako model przepływu dwóch nieściśliwych cieczy między dwoma pojemnikami.

Zadanie 11. Załóżmy, że (X_n) , jest dwustanowym łańcuchem Markowa na $\mathcal{S} = 0, 1$ z macierzą przejść postaci

$$P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}.$$

Obecny stan łańcucha zależy tylko od poprzedniego stanu. Można modelować proces dwuwymiarowy, którego stan obecny zależy od jego stanu w dwóch kolejnych wcześniejszych chwilach. Niech $Z_n = (X_{n-1}, X_n)$, dla $n \geq 1$. Ciąg $\{Z_n\}_{n \geq 1}$ jest łańcuchem Markowa z przestrzenią stanów $\mathcal{S} \times \mathcal{S} = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$. Podaj postać macierzy przejść tego nowego łańcucha.

Zadanie 12. Załóżmy, że $\mathbf{P}$ jest macierzą stochastyczną o równych wierszach. Pokaż, że dla wszystkich $n > 1$, $\mathbf{P}^n = \mathbf{P}$.

Zadanie 13. Niech $\{X_n, n \geq 0\}$ będą łańcuchem Markowa z macierzą przejść

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ p & 1-p & 0 \end{pmatrix}.$$

gdzie $0 < p < 1$. Niech g będzie funkcją zdefiniowaną przez

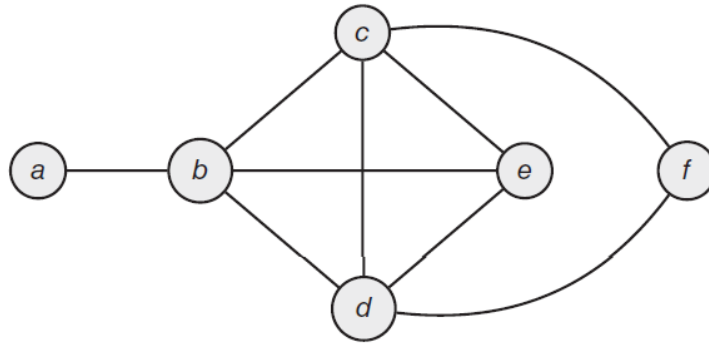
$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } x = 1, \\ 1, & \text{jeśli } x = 2, 3. \end{cases}$$

Niech $Y_n = g(X_n)$, dla $n \geq 0$. Pokaż, że $\{Y_n, n \geq 0\}$ nie jest łańcuchem Markowa.

Zadanie 14. Macierz stochastyczna jest nazywana podwójnie stochastyczną, jeśli jej kolumny sumują się do 1. Niech (X_n) bądź łańcuchem Markowa na $\{1, \dots, k\}$ z podwójnie stochastyczną macierzą przejść i jednostajnym rozkładem początkowym na $\{1, \dots, k\}$. Pokaż, że dla wszystkich $n \geq 0$ rozkład stanu łańcucha w chwili n , X_n jest rozkładem jednostajnym na $\{1, \dots, k\}$.

PROBLEMY

Problem 1 (Losowy spacer po grafie). Graf jest zbiorem wierzchołków i zbiorem krawędzi. Dwa wierzchołki są sąsiadami, jeśli łączy je krawędź. Stopień wierzchołek jest liczbą sąsiadów jego sąsiadów. Stopień wierzchołka x oznaczamy przez $\deg(x)$. Dla grafu z rysunku 2, $\deg(a) = 1$,



Rysunek 2: Graf $\mathcal{G}$.

$\deg(b) = \deg(c) = \deg(d) = 4$, $\deg(e) = 3$, a $\deg(f) = 2$.

Wyobraź sobie wierzchołki jako płatki wodnych lilii na stawie. Żaba siedzi na jednej lilii. W każdej jednostce czasu, żaba przeskakuje do sąsiedniej lilii wybranej losowo. Na przykład, jeśli żaba znajduje się na lilii **c**, może przeskoczyć na **b**, **d**, **e** lub **f** z prawdopodobieństwem $1/4$ na każdą z nich. Jeśli żaba jest na **f**, przeskakuje na **c** lub **d** z prawdopodobieństwem $1/2$ na każdą z nich. Jeśli żaba jest na **a**, zawsze skacze na **b**. Niech X_n będzie lokalizacją żaby po n -tym przeskoku. Ciąg zmiennych losowych $X_0, X_1, \dots$ tworzy łańcuch Markowa. Biorąc pod uwagę graf $\mathcal{G}$, taki proces nazywany jest prostym błądzeniem losowym na grafie $\mathcal{G}$. Dla wierzchołków i oraz j napis $i \sim j$, oznacza, że i oraz j są sąsiadami. Prawdopodobieństwo przejścia w jednym kroku jest równe

$$P(X_1 = j \mid X_0 = i) = \begin{cases} \frac{1}{\deg(i)}, & \text{jeśli } i \sim j, \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Wykonaj symulację 50 kroków prostego błądzenia losowego na grafie z rysunku 2. Powtórz symulację 10 razy. Ile symulacji kończy się na wierzchołku **c**? Porównaj otrzymany wynik z dokładnym prawdopodobieństwem granicznym odwiedzenia **c** przez błądzenie.

Problem 2. Zobacz na **ruinagracza.R**. Wymodeluj proces ruiny gracza dla gracza z początkowym kapitałem 2zł, grającego w uczciwą grę.

- (a) Oszacuj prawdopodobieństwo, że gracz będzie zrujnowany, zanim wygra 5zł.
- (b) Skonstruuj macierz przejścia dla związanego z modelem ruiny gracza łańcuchem Markowa. Oszacuj pożądane prawdopodobieństwo z punktu (a) przez obliczenie wysokiej potęgi macierzy prawdopodobieństw przejścia.
- (c) Porównaj swoje wyniki z dokładnym prawdopodobieństwem.