

Zadania i problemy do wykładu *Modelowanie stochastyczne*
(ZESTAW NR 7)

ZADANIA

Zadanie 1. Wykaż, że jeśli dla łańcucha Markowa $\{X_n\}_{n \geq 0}$ rozkład X_0 i prawdopodobieństwa przejść $p(i, j)$ są zadane to łańcuch Markowa jest całkowicie zadany. Bardziej precyzyjnie, udowodnij, że dla dowolnego $n \geq 0$ i dowolnych stanów $i_0, i_1, \dots, i_n$ zachodzi równość

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n) = P(X_0 = i_0) p(i_0, i_1) p(i_1, i_2) \dots p(i_{n-1}, i_n).$$

Zadanie 2. Udowodnij, że relacja "należenia do tej samej klasy zamkniętej" jest relacją równoważności na zbiorze stanów łańcucha Markowa.

Zadanie 3. Rozpatrzmy łańcuch Markowa z przestrzenią stanów $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ i macierzą przejść postaci

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Wyznacz wszystkie klasy zamknięte i określ czy są chwilowe czy powracające.

Zadanie 4. Rozpatrzmy łańcuch Markowa z przestrzenią stanów $\{1, 2, 3, 4\}$ i macierzą przejść postaci

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Wyznacz rozkład stacjonarny dla tego łańcucha.

Zadanie 5. Rozpatrzmy łańcuch Markowa z macierzą prawdopodobieństw przejść postaci

$$\begin{pmatrix} 1-a & a & 0 \\ 0 & 1-b & b \\ c & 0 & 1-c \end{pmatrix},$$

gdzie $0 < a, b, c < 1$. Wyznacz rozkład stacjonarny dla tego łańcucha.

Zadanie 6. Rozpatrzmy r kule ponumerowanych liczbami od 1 do r . Pewna część tych kul znajduje się w urnie numer 1, a pozostałe w urnie numer 2. W każdym kroku wybieramy w sposób losowy jeden z numerów i kulę o tym numerze przenosimy z urny, w której się znajduje do drugiej urny. Niech X_n będzie liczbą kul znajdujących się w urnie numer 1 po n krokach. Uzasadnij, że proces $\{X_n\}_{n \geq 0}$ jest łańcuchem Markowa i wyznacz prawdopodobieństwa przejść w jednym kroku. Pokaż, że tak zdefiniowany łańcuch Markowa jest nieredukowalny i powracający.

Zadanie 7. Rozpatrzmy łańcuch Markowa z macierzą przejść postaci

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Pokaż, że dla każdego i oraz j prawdopodobieństwo przejścia w n krokach ze stanu i do stanu j , $p_n(i, j)$, jest zbieżne gdy n jest zbieżne do nieskończoności.

Zadanie 8. Niech X_n będzie sumą liczby oczek wyrzuconych w n rzutach symetryczną kostką do gry. Niech Y_n będzie resztą z dzielenia X_n przez 5.

(a) Wyznacz macierz prawdopodobieństw przejść, w jednym kroku, dla łańcucha Markowa $\{Y_n\}_{n=0}^\infty$.

(b) Wyznacz wartość granicy: $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n \text{ jest podzielne przez } 5)$.

Zadanie 9. Macierz prawdopodobieństw przejść $P = [p_{i,j}]$ nazywamy podwójnie stochastyczną jeśli

$$\sum_i p_{i,j} = 1 \quad \text{oraz} \quad \sum_j p_{i,j} = 1.$$

Zakładając, że przestrzeń stanów jest skończona wyznacz rozkład stacjonarny dla łańcucha Markowa z podwójnie stochastyczną macierzą prawdopodobieństw przejść.

Zadanie 10. Zakładamy, że łańcuch Markowa $\{X_n\}_{n=0}^\infty$ jest nieredukowalny, nieokresowy i dodatnio rekurencyjny. Wykaż, że dla każdego stanu j

$$\sum_i \frac{1}{E(F_i | X_0 = i)} p(i, j) = \frac{1}{E(F_j | X_0 = j)},$$

gdzie F_k oznacza moment pierwszej wizyty w stanie k .

Zadanie 11. Rozpatrzmy łańcuch Markowa z macierzą przejść postaci

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(a) Wykaż, że łańcuch ten nie ma rozkładu odwracalnego.

(b) Czy istnieje rozkład stacjonarny?

Zadanie 12. Niech $p \in (0, 1)$. Rozpatrzmy N punktów na okręgu oraz błądzenie losowe które w jednym kroku przemieszcza się z prawdopodobieństwem p do sąsiedniego punktu zgodnie z ruchem wskazówek zegara oraz z prawdopodobieństwem $1 - p$ w przeciwną stronę.

- (a) Wykaż, że dla każdego $p \in (0, 1)$ łańcuch ten nie ma jedynego rozkładu stacjonarnego.
- (b) Podaj postać rozkładu stacjonarnego.
- (c) Wykaż, że łańcuch ten ma rozkład odwracalny wtedy i tylko wtedy gdy $p = \frac{1}{2}$.

Zadanie 13. Załóżmy, że mamy N różnych szczepów bakterii. Mutacja pojawia się w każdej generacji i zmienia jeden ze szczepów w inny z prawdopodobieństwem $a > 0$. Proces ten można opisać jako skończony łańcuch Markowa z N elementową przestrzenią stanów i prawdopodobieństwami przejść postaci

$$p_{ii} = 1 - a \quad \text{oraz} \quad p_{ij} = \frac{a}{N - 1}, i \neq j.$$

Zakładamy, że początkowo występuje jedynie szczep typu i .

- (a) Wyznacz prawdopodobieństwo, że w n -tej generacji szczep jest typu i , czyli prawdopodobieństwo $p_{ii}^{(n)}$.
- (b) Wyznacz rozkład stacjonarny.

Zadanie 14. Prosty model mutacji punktowej DNA zaproponowany przez Jukes i Cantora opisany jest przez łańcuch Markowa z przestrzenią stanów (A, G, C, T) i macierzą prawdopodobieństw przejść postaci

$$\begin{pmatrix} 1 - 3a & a & a & a \\ a & 1 - 3a & a & a \\ a & a & 1 - 3a & a \\ a & a & a & 1 - 3a \end{pmatrix}.$$

Prawdopodobieństwo, że jeden nukleotyd zostanie zastąpiony, w drodze mutacji, innym jest równe

$$p_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i) = a, 0 < a < 1/3 \quad \text{dla } i, j = A, G, C, T \text{ oraz } i \neq j.$$

- (a) Uzasadnij, że

$$p_{ii}^{(n)} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}(1 - 4a)^n.$$

- (b) Wyznacz rozkład stacjonarny.

Krzysztof Topolski