

Zadania i problemy do wykładu *Modelowanie stochastyczne*
(ZESTAW NR 8)

ZADANIA

Zadanie 1. Łańcuch Markowa ma n stanów. Jeśli łańcuch jest w stanie k , to rzucamy niesymetryczną monetą dla której prawdopodobieństwo wyrzucenia orła jest równe p . Jeśli wyrzucimy orła to łańcuch pozostaje w stanie k . Jeśli natomiast wyrzucimy reszkę to łańcuch przechodzi do innego, losowo wybranego stanu. Podaj postać macierzy przejść dla tak zdefiniowanego łańcucha oraz wyznacz rozkład stacjonarny.

Zadanie 2. Rozpatrzmy łańcuch Markowa z macierzą prawdopodobieństw przejść postaci:

$$P_{ij} = \begin{cases} \frac{i}{i+1}, & \text{gdy } j = 1, \\ \frac{1}{i+1}, & \text{gdy } j = i + 1, \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

- (a) Czy łańcuch Markowa ma jedyny rozkład stacjonarny? Jeśli tak, to wyznacz jego postać.
- (b) Sklasyfikuj stany tego łańcucha.
- (c) Odpowiedz na pytanie z punktu (a) gdy w macierzy P zamienimy wiersze. Czyli

$$P_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{i+1}, & \text{gdy } j = 1, \\ \frac{i}{i+1}, & \text{gdy } j = i + 1, \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Zadanie 3. Rozpatrzmy dwie macierze przejść postaci

$$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Rozpatrzmy łańcuch Markowa na czterech stanach z macierzą przejść daną przez macierz blokową

$$P = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Czy łańcuch ma jedyny rozkład stacjonarny? Jeśli tak, pokaż dystrybucję. Jeśli nie, wyjaśnij dlaczego. (b) Czy istnieje granica $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}^n$? Jeśli tak, to podaj postać tej

granicy. (c) Czy tak zdefiniowany łańcuch Markowa ma rozkład graniczny? Jeśli tak, to podaj jego postać.

Zadanie 4. Załóżmy, że $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_k)$ jest rozkładem prawdopodobieństwa. Niech $\mathbf{P}$ będzie $k \times k$ macierzą prawdopodobieństw przejściową określoną przez

$$P_{ij} = \begin{cases} p_j & \text{gdy } i = 1, \dots, k-1, \\ 0 & \text{gdy } i = k, j < k, \\ 1 & \text{gdy } i = k, j = k, \end{cases}$$

Opisz wszystkie rozkłady stacjonarne dla $\mathbf{P}$.

Zadanie 5. Łańcuch Markowa ma macierz przejściową $\mathbf{P}$ i rozkład graniczny π . Zakładamy, że π jest rozkładem początkowym łańcucha. Oznacza to, że łańcuch jest w stanie stacjonarnym. Wyznacz postać następujących granic:

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = j | X_{n-1} = i),$
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = j | X_0 = i),$
- (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_{n+1} = k, X_n = j | X_0 = i),$
- (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_0 = j | X_n = i).$

Zadanie 6. Na szachownicy jeden losowo ustawiony skoczek wykonuje proste spacer losowy. Z każdego pola, skoczek wybiera spośród swoich dozwolonych ruchów z równym prawdopodobieństwem. Jeśli skoczek zaczyna z pola w rogu, jak długo to potrwa zanim wrócić do tego rogu?

Zadanie 7. Podobnie jak w poprzednim zadaniu, znajdź oczekiwany czas powrotu z narożnego pola dla następujących figur szachowych: (i) hetman, (ii) wieża, (iii) król, (iv) goniec. Uporządkuj figury według oczekiwanego czasu powrotu.

Zadanie 8. Rozpatrzmy dwustanowy łańcuch Markowa z macierzą przejść

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix},$$

gdzie p i q nie są jednocześnie równe 0. Niech T będzie czasem pierwszego powrotu do stanu 1, dla łańcucha startującego z 1.

- (a) Pokaż, że $P(T \geq n) = p(1-q)^{n-2}$, dla $n \geq 2$.
- (b) Wyznacz $E(T)$ i sprawdź, czy $E(T) = 1/\pi_1$, gdzie π jest rozkładem stacjonarnym łańcucha.