**Zadania i problemy do wykładu *Procesy Markowa***
(Zestaw nr 5)

## Zadania

**Zadanie 1.** Zbadać nieredukowalność następujących JŁM: (a) procesu błądzenia losowego, (b) procesu zapasów, (c) procesu urodzin i śmierci, (d) procesu Galtona-Watsona.

**Zadanie 2.** Niech $X_{n+1} = (X_n - 1)_+ + Z_{n+1},\ n \geqslant 1$, gdzie $\{Z_n\}$ jest ciagiem iid, przyjmującym wartości całkowite nieujemne. Pokazazać, że JŁM $\{X_n\}$ jest nieredukowalny wtedy i tylko wtedy, gdy $P(Z_1 = 0) > 0$ i $P(Z_1 \geqslant 2) > 0$. Ponadto, wykorzystując prawo wielkich liczb, pokazać, że jeżeli $EZ_n > 1$, to stan 0 jest rekurencyjny, a jeżeli $EZ_1 < 1$ to stan 0 jest tranzytywny.

**Zadanie 3.** Pokazać, że JŁM w modelu wieku elementu (model wymiany maszyn) jest nieredukowalny. Ponadto jest on okresowy o okresie $d$ wtedy i tylko wtedy, gdy rozkŁad zmiennej losowej $Y_1$ jest okresowy o okresie $d$, tzn.

$$d = NWD\{n \geqslant 1 : P(Y_1 = n) >)\}.$$

**Zadanie 4.** Niech $\mathbb{P}$ będzie nieredukowalną macierzą prawdopodobieństw przejść na skończonej przestrzeni stanów $J$. Pokazać, że koniecznym i dostatecznym warunkiem aby $\mathbb{P}$ byŁa nieokresowa jest istnienie naturalnej liczby $m$, takiej że wszystkie wyrazy macierzy $\mathbb{P}^m$ są dodatnie.

**Zadanie 5.** Pokazać, że jeżeli macierz prawdopodobieństw przejść $\mathbb{P}$ jest nieredukowalna oraz $p_{i,i} > 0$ dla pewnego stanu $i$, to $\mathbb{P}$ jest nieokresowa.

**Zadanie 6.** Niech $\mathbb{P}$ będzie nieredukowalną macierzą prawdopodobieństw przejść na przeliczalnej przestrzeni stanów $J$, a $d$ niech będzie jej okresem. Pokazać, że obcięcie $\mathbb{P}^d$ do dowolnej klasy cyklicznej jest nieokresową macierzą prawdopodobieństw przejść.

**Zadanie 7.** W skończonym JŁM stan $j$ jest stanem chwilowym wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki stan $k$, że $k$ może być osiągnięty ze stanu $j$, ale nie odwrotnie.

**Zadanie 8.** Pierwsza kolumna macierzy stochastycznej $\mathbb{P}$ ma postać $(q_0, q_1, \dots)$, a $p_{i,i+1} = 1 - q_i$ dla $i = 0, 1, 2 \dots$. Zbadać nieredukowalność tej macierzy. Udowodnić, że wszystkie stany JŁM z tą macierzą prawdopodobieństw przejść są chwilowe wtedy i tylko wtedy, gdy $\sum_j q_j < \infty$. Kiedy są one stanami zerowo rekurencyjnymi?

**Zadanie 9.** Pierwszy wiersz macierzy stochastycznej $\mathbb{P}$ ma postać $(p_1, p_2, \dots)$. W pozostaŁych przypadkach $p_{j,j-1} = 1$. Zbadać nieredukowalność i rekurencyjność tej macierzy.

**Zadanie 10.** Pokazać, że jeżeli ilość stanów JŁM jest równa $m < \infty$ oraz jeżeli stan $i$ jest osiągalny ze stanu $j$, to można go osiągnąć po co najwyżej $m$ krokach.

**Zadanie 11.** Zbadać nieredukowalność i rekurencyjność błądzenia losowego na:
(a) liczbach całkowitych z prawdopodobieństwami $p$ i $q = 1 - p$, przejścia w prawo i odpowiednio w lewo,
(b) $\mathbf{Z}^2$ , gdzie $\mathbf{Z}$ zbiór liczb całkowitych i prawdopodobieństwa przejścia do najbliższych sąsiadów są takie same,
(c) $\mathbf{Z}^3$ , gdzie $\mathbf{Z}$ zbiór liczb całkowitych i prawdopodobieństwa przejścia do najbliższych sąsiadów są takie same.

**Zadanie 12.** Niech $\mathbb{P}$ będzie nieredukowalną macierzą prawdopodobieństw przejść na przeliczalnej przestrzeni stanów $J$, a $d$ niech będzie jej okresem. Pokazać, że obcięcie $\mathbb{P}^d$ do dowolnej klasy cyklicznej jest nieokresową macierzą prawdopodobieństw przejść.

**Zadanie 13.** Niech JŁM zawiera $a$ stanów i niech stan $j$ będzie rekurencyjny. Wtedy istnieje liczba $q < 1$, taka że dla $n > a$ prawdopodobieństwo, że czas powrotu do stanu $j$ przekroczy $n$ jest mniejsze niż $q^n$.