Zadania i problemy do wykładu *Estymacja parametrów*

Sprawdź czy potrafisz.

Zadanie 1. Czas pracy (mierzony w godzinach) pewnego typu żarówek jest dobrze opisany przez rozkład normalny $N(\mu, \sigma^2)$. W celu oszacowania wartości średniego czasu pracy μ, dokonano pomiarów dla $n = 5$ wylosowanych niezależnie zarówek. Otrzymano następujące wyniki: 2004, 1960, 2210, 1899, 2101.

(i) Podaj postać i wartość estymatora parametru μ.

(ii) Podaj postać i wartość estymatora parametru σ^2.

(iii) Podaj postać przedziału ufności na poziomie ufności α dla średniej μ.

(iv) Wyznacz przedział ufności na poziomie ufności $0,95$ dla średniej μ.

Zadanie 2. Niech $X_1, ..., X_n$ będzie próbą losową z rozkładu wykładniczego o gęstości

$$f(x|\theta) = \theta \exp(-\theta x), \qquad \theta > 0,\ x \geqslant 0.$$

(i) Podaj postać funkcji wiarogodności.

(ii) Wyznacz estymator największej wiarogodności parametru θ.

(iii) Wyznacz metodą momentów estymator parametru θ.

Zadanie 3. Niech $x_1, x_2, ..., x_n$ oraz $y_1, y_2, ..., y_m$ będą realizacjami dwóch prób, natomiast $\bar{x}$ oraz $\bar{y}$ ich średnimi próbkowymi.

1. Czy prawda jest, że
$$\frac{\bar{x} + \bar{y}}{2},$$
jest średnią próbkową próby połączonej $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m$?

2. Czy prawda jest, że
$$\frac{\bar{x} + \bar{y}}{2},$$
jest średnią próbkową próby połączonej $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m$, w sytuacji gdy $n = m$?

Zadanie 4. Niech $x_1, x_2, ..., x_n$ będzie realizacją próby losowej dla której $x_i \neq 0$. Nas interesują dane postaci

$$y_i = \frac{1}{x_i},\ i = 1, 2, ..., n.$$

1. Czy prawdą jest, że $\bar{x} = \frac{1}{\bar{y}}$?

2. Załóżmy, że n jest parzyste oraz, że wszystkie $x_i > 0$. Czy prawdą jest, że

$$Med(y_1, ..., y_n) = \frac{1}{Med(x_1, ..., x_n)}?$$

Zadanie 5. Niech $X_1, X_2, ..., X_n$ będą zmiennymi losowymi o tej samej wartości oczekiwanej μ.

1. Czy $S = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{3}X_2 + \frac{1}{6}X_3$ jest nieobciążonym estymatorem dla μ?
2. Jakie warunki muszą spełniać stałe $a_1, a_2, ..., a_n$, aby statystyka

$$T = a_1X_1 + a_2X_2 + ... + a_nX_n,$$

była nieobciążonym estymatorem dla μ?

3. Przy jakich warunkach na stałe a i b, statystyka

$$M = a(X_1 + X_2 + ... + X_n) + b,$$

jest nieobciążonym estymatorem dla μ?

Zadanie 6. W celu oszacowania prawdopodobieństwa wyrzucenia orła w pojedyńczym rzucie monetą wykonano 500 niezależnych rzutów w seriach po 5 rzutów i zanotowano ile z tych serii zakończyło się wyrzuceniem odpowiednio: zero, jednego, dwóch, trzech, czterech, pięciu orłów. Wyniki przedstawione są w następującej tabeli.

Liczba orłów w serii	0	1	2	3	4	5
Liczba serii	3	16	36	32	11	2

Na podstawie powyższych danych dokonaj estymacji metodą największej wiarogodności wartość nieznanego prawdopodobieństwa wyrzucenia orła w pojedyńczym rzucie.

(i) Podaj postać funkcji wiarogodności.

(ii) Wyznacz postać estymatora najwiekszej wiarogodności prawdopodobieństwa wyrzucenia orła w pojedyńczym rzucie.

(iii) Dla danych z zadania, podaj wartość estymatora najwiekszej wiarogodności prawdopodobieństwa wyrzucenia orła w pojedyńczym rzucie.

(iv) Wyznacz postać estymatora najwiekszej wiarogodności prawdopodobieństwa wyrzucenia dokładnie trzech orłów w pojedyńczej serii 5 rzutów tą monetą.

(v) Dla danych z zadania podaj wartość wyznaczonego w punkcie (iv) estymatora.