

Zadania i problemy do wykładu *Testowanie hipotez statystycznych*

(ZESTAW NR 5)

ZADANIA

Zadanie 1. W 2000 r. wskaźnik ubóstwa w Polsce wynosił około 11,7 %. Do 2010 r. wskaźnik ten wzrósł do 15,00 %. Czy nadal rośnie? Na podstawie spisu powszechnego z roku 2010 wskaźnik ten został oszacowany na poziomie 15,13 %, Załóżmy, że oszacowanie zostało dokonane przy założeniu, że zostało otrzymane na podstawie prostej próby losowej, a wielkość próby w 2011 r. wynosiła 150 000. Badamy, czy wartość 15,13% w roku 2011 wykazuje wzrost w porównaniu do roku 2010. Przetestuj tak postawioną hipotezę

- (a) programując w R funkcję opisującą odpowiednią statystykę testową,
- (b) wywołując odpowiednią funkcję pakietu R.
- (c) Przetestuj hipotezę przy założeniu, że hipoteza alternatywna jest postaci

$$H_1 : p \neq 0,15$$

Hipoteza zerowa: $H_0 : p = 0,15$.

Ponieważ alternatywą jest to, że nowa liczba jest większa niż stara więc:

$$H_1 : p > 0,15.$$

Na pytanie, czy ta różnica jest znacząca możemy odpowiedzieć korzystając obliczeń wykonanych przy użyciu pakietu R.

```
> phat <- 0.1513
> p0 <- 0.1500; n <- 150000
> SD <- sqrt(p0 * (1-p0)/n)
> pnorm(phat, mean=p0, sd=SD, lower.tail=FALSE) # p-wartość
```

```
[1] 0.07926276
```

Zatem p-wartość wynosi 0,08. Stosując standard $\alpha = 0,05$ dla tej oceny stwierdzimy, że różnica nie jest statystycznie istotna. Powyższe obliczenia są wykonywane ręcznie. Wstępnie załadowany pakiet statystyk ma wiele wbudowanych funkcji do bardziej bezpośredniego testowania istotności. W pakiecie R funkcją dla powyższego testu proporcji jest **prop.test**. Ta sama funkcja może posłużyć również do wyznaczenia przedziałów ufności przy podobnych założeniach. Funkcja **prop.test** wymaga kilku argumentów.

prop.test (x, n, p = ..., alternative = "two.sided")

Wartość x to liczba osób żyjących poniżej minimum socjalnego w próbie, w naszym przypadku to 22695 ($15000 * 0,1513 = 22695$). Wartość n jest to rozmiar próbki 150000.

Rodzaj hipotezy alternatywnej określa argument **alternative**. Ten argument ma jedną z następujących wartości: „less”, „greater”, lub „two.sided”. Wartość domyślna to „two.sided”.

```
> prop.test(x=22695, n=150000, p=.1500, alternative="greater")
```

1-sample proportions test with continuity correction

```
data: 22695 out of 150000, null probability 0.15
X-squared = 1.9781, df = 1, p-value = 0.0798
alternative hypothesis: true p is greater than 0.15
95 percent confidence interval:
 0.1497811 1.0000000
sample estimates:
      p
0.1513
```

Jeśli zmienimy hipotezę alternatywną na hipotezę postaci $H_1 : p \neq 0,15$ to

```
> prop.test(x=22695, n=150000, p=0.1500, alternative="two.sided")
```

1-sample proportions test with continuity correction

```
data: 22695 out of 150000, null probability 0.15
X-squared = 1.9781, df = 1, p-value = 0.1596
alternative hypothesis: true p is not equal to 0.15
95 percent confidence interval:
 0.1494922 0.1531257
sample estimates:
      p
0.1513
```

Zadanie 2. (Test istotności dla średniej w populacji). Grupa konsumentów chce sprawdzić, czy rzeczywisty przebieg nowego SUV-a pasuje do reklamowanych 17 kilometrów na litrze paliwa. Grupa podejrzewa, że przebieg jest niższy. W celu potwierdzenia swoich przypuszczeń grupa napełnia zbiornik SUV-a i rejestruje przebieg. procedurę tą powtórzono dziesięć razy. Otrzymane wyniki to:

11.4, 13.1, 14.7, 14.7, 15.0, 15.5, 15.6, 15.9, 16.0, 16.8.

Zakładamy, że dane opisujące zużycie paliwa mają rozkład normalny. Czy grupa konsumentów ma rację? Przetestuj tak postawioną hipotezę

- (a) programując w R funkcję opisującą odpowiednią statystykę testową,
- (b) wywołując odpowiednią funkcję pakietu R.
- (c) Przetestuj hipotezę przy założeniu, że hipoteza alternatywna jest postaci

$$H_1 : \mu > 0,15$$

Jeśli dane $x_1, x_2, \dots, x_n$ to próbka losowa z rozkładu normalnego $N(m, \sigma^2)$ lub n jest wystarczająco duży dla zastosowania centralnego twierdzenia granicznego, test istotności dla

$$H_0 : \mu = \mu_0, \quad H_1 : \mu < \mu_0, \quad \mu > \mu_0 \quad \text{lub} \quad \mu \neq \mu_0$$

można wykonać za pomocą statystyki testowej

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}.$$

W R, funkcja `t.test` może być użyta do obliczenia p-wartości i przetestowania hipotezy dla danych zawartych w `x`.

```
t.test(x, mu = ..., alternatywa = "two.sided")
```

Hipotezy zerowa i alternatywna są postaci: $H_0 : \mu = 10$, $H_1 : \mu < 10$.

Jest to test jednostronny.

```
> knl <- c(11.4, 13.1, 14.7, 14.7, 15.0, 15.5, 15.6, 15.9, 16.0, 16.8)
> xbar <- mean(knl); s <- sd(knl); n <- length(knl)
> c(xbar=xbar, s=s, n=n) # parametry

      xbar      s
14.870000 1.572012 0.000000

> SE <- s/sqrt(n)
> obs <- (xbar - 17)/SE
> pt(obs, df = 9, lower.tail = T)

[1] 0.001017878
```

Możemy przeprowadzić test hipotezy również bezpośrednio wywołując funkcję `t.test` postaci:

```
> t.test(knl, mu = 17, alternative="less")
```

One Sample t-test

```
data: knl
t = -4.2847, df = 9, p-value = 0.001018
alternative hypothesis: true mean is less than 17
95 percent confidence interval:
 -Inf 15.78127
sample estimates:
mean of x
 14.87
```

Zadanie 3. Załóżmy, że stopa ubóstwa w 2010 roku w wysokości 15,00% została otrzymana na podstawie próby losowej o liczebności 160 000 osób, a wskaźnik ubóstwa w 2011 roku na poziomie 15,13% pochodzi z analizy próby losowej o liczebności 150 000. Czy różnica między proporcjami jest statystycznie znaczący? Przetestuj tak postawioną hipotezę

- (a) programując w R funkcję opisującą odpowiednią statystykę testową,
- (b) wywołując odpowiednią funkcję pakietu R.
- (c) Przetestuj hipotezę przy założeniu, że hipoteza alternatywna jest postaci $H_1 : p_1 > p_2$

Testujemy więc hipotezę zerową postaci $H_0 : p_1 = p_2$,

przy hipotezie alternatywnej postaci $H_1 : p_1 < p_2$.

Możemy użyć funkcji R postaci `prop.test` w tym celu musimy podać wartości p_1 i p_2 oraz liczebności prób n_1 i n_2

```
> phat <- c(0.1500, 0.1513) # proporcje w obu próbach
> n <- c(160000, 150000) # liczebności prób
> n * phat # liczebności osób ■yjających w ubóstwie w obu latach
```

```
[1] 24000 22695
```

```
> prop.test(n * phat, n, alternative="less")
```

2-sample test for equality of proportions with continuity correction

```
data: n * phat out of n
X-squared = 1.0125, df = 1, p-value = 0.1571
alternative hypothesis: less
95 percent confidence interval:
 -1.00000000000 0.0008211865
sample estimates:
prop 1 prop 2
0.1500 0.1513
```

Możemy dokonać odpowiednich obliczeń samodzielnie

```
> p <- sum(n * phat)/sum(n) # (n_1p_1 + n_2p_2)/(n_1 + n_2)
> obs <- (phat[1]-phat[2]) / sqrt(p*(1-p)*sum(1/n))
> obs
```

```
[1] -1.011265
```

```
> pnorm(obs)
```

```
[1] 0.1559448
```

i podjąć decyzję na podstawie p-wartości.

Zadanie 4. AZT był pierwszym zatwierdzonym lekiem przeciwretrowirusowym stosowanym w leczeniu zakażeń wirusem HIV. Zalecana dawk wynosiła 300 mg dwa razy na dobę. Wyższe dawki powodują więcej skutków ubocznych. Ale czy są bardziej skuteczne? Badanie w 1990 r. porównano dawki 300 mg, 600 mg i 1500 mg (źródło <http://www.aids.org>). Badanie wykazało wyższą toksyczność przy większych dawkach, i, co ważniejsze, niższa dawka może być równie skuteczna. Skuteczność leku była mierzona poziomem antygenu p24. Antygen p24 stymuje odpowiedź immunologiczną. Pomiar poziomy p24 dla grup przyjmujących lekarstwo w dawkach 300 mg i 600 mg podano w tabeli.

Dawka	Poziom p24									
300 mg	284	279	289	292	287	295	285	279	306	298
600 mg	298	307	297	279	291	335	299	300	306	291

Tabela 1: Stopień utraty włosów w obu grupach

Przetestuj hipotezę o równości średnich w obu grupach

(a) przy założeniu, że wariancje w obu grupach są takie same.

(c) Przetestuj hipotezę przy założeniu, że hipoteza alternatywna jest postaci

$$H_1 : \mu_1 > \mu_2$$

(b) Jaką konkluzję otrzymamy gdy nie założymy równych wariancji w obu grupach?

Niech μ_1 będzie średnią w grupie 300 mg, a μ_2 średnią w grupie 600 mg. Testujemy hipotezy

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2, \quad H_1 : \mu_1 \neq \mu_2,$$

przy użyciu testu t-Studenta. Najpierw sprawdzamy, czy założenie wspólnego wariancja i normalność wydają się właściwe, patrząc na dwie wykresy gęstości:

```
> m300 <- c(284, 279, 289, 292, 287, 295, 285, 279, 306, 298)
> m600 <- c(298, 307, 297, 279, 291, 335, 299, 300, 306, 291)
> plot(density(m300))
> lines(density(m600), lty=2)
```

Otrzymane wykresy mogą świadczyć, że założenie o normalności rozkładów oraz równości wariancji nie są naruszone. W związku z tym test t może być użyty.

```
> t.test(m300, m600, var.equal=TRUE)
```

Two Sample t-test

```
data: m300 and m600
t = -2.034, df = 18, p-value = 0.05696
alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 -22.1584072  0.3584072
sample estimates:
mean of x mean of y
 289.4      300.3
```

Wartość p wynosi 0,05696 dla testu dwustronnego. Sugeruje to różnicę w wartościach średnich w obu grupach, ale różnica ta nie jest istotnie statystycznie przy poziomie istotności na poziomie 0,05. Spojrzenie na raportowany przedział ufności dla wartości różnicy średnich, sugeruje szeroki zakres możliwej wartości dla $\mu_x - \mu_y$. Jaką konkluzję otrzymamy gdy nie założymy równych wariancji w obu grupach? W tym celu wywołamy funkcję testu t-Studenta z poprawką Welcha.

```
> t.test(m300, m600)
```

Welch Two Sample t-test

```
data: m300 and m600
t = -2.034, df = 14.509, p-value = 0.06065
alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 -22.3557409  0.5557409
sample estimates:
mean of x mean of y
 289.4      300.3
```

Zadanie 5. Załóżmy, że sponsorowane przez przemysł badanie kliniczne "wykazało", że pewna substancja hamuje wypadanie włosów u mężczyzn. Zastosowane podejście badawcze

polegało na przeprowadzeniu badań w dwóch grupach. Jedna otrzymywała leczenie przy użyciu badanej substancji druga otrzymywała placebo. Przeprowadzono randomizowane badanie z podwójnie ślełą próbą. Wypadanie włosów mierzono przez fotografie, liczbę włosów i kwestionariusze. Inowacją do standardowo wybieranych grup było użycie bliźniąt jednojajowych. Dla każdej pary bliźniaków jedno zostało losowo przydzielone do grupy leczonej, a do drugiej do grupy kontrolnej. To pozwoliło na kontrolę różnic genetycznych. Wpływ genetyki może być tak duży, że prawdziwy efekt leczenia może być niewykryty lub błędnie zinterpretowany. Dane zmierzonego na podstawie fotografii stopnia utraty włosów w obu grupach przedstawione są w tabeli 2.

Lekarstwo	5	3	5	7	4	4	7	4	3
Placebo	2	3	2	4	2	2	3	4	2

Tabela 2: Dane stopnia utraty włosów w obu grupach

Sprawdź czy substancja rzeczywiście zmniejsza stopień utraty włosów.

```
> lekarstwo <- c(5, 3, 5, 6, 4, 4, 7, 4, 3)
> placebo <- c(2, 3, 2, 4, 2, 2, 3, 4, 2)
> t.test(lekarstwo, placebo, paired=TRUE, alternative="two.sided")
```

Paired t-test

```
data: lekarstwo and placebo
t = 4.1538, df = 8, p-value = 0.003192
alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 0.8402524 2.9375254
sample estimates:
mean of the differences
 1.888889
```

Krzysztof Topolski