

1 Wykład 1

1.1 Funkcja potęgowa.

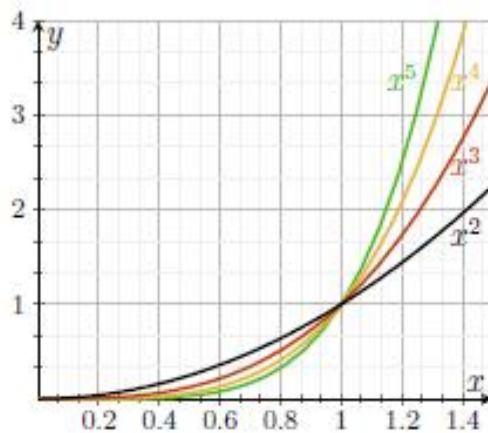
Jak wiele rzeczywistych obiektów, jak na przykład obiekty architektoniczne, które składają się z prostych jednostek (drewnianych belek, cegieł czy bloków kamienia) czy organizmy które składają się z komórek, wiele ciekawych i złożonych funkcji można zbudować z prostszych funkcji. Zilustrujmy to na przykładzie rodziny funkcji potęgowych postaci: $f(x) = x^n$. Naszym pierwszym zadaniem jest poznanie właściwości członków tej "rodziny". Później używamy funkcji potęgowych jako "cegiełek" do konstruowania bardziej złożonych funkcji czyli wielomianów, i funkcji wymiernych. Następnie zobaczymy, jak tego typu funkcje oraz ich własności można użyć do konstrukcji oraz analizy zjawisk biologicznych przebiegających na różnych poziomach.

Rozważmy funkcje potęgowe, czyli funkcje postaci

$$y = f(x) = x^n,$$

gdzie n jest dodatnią liczbą całkowitą. Funkcje potęgowe należą do najbardziej elementarnych i "elegantnych" funkcji a do obliczenia ich wartości, w dowolnym punkcie, potrzebujemy jedynie mnożenia. Są nie tylko proste do obliczenia ale ich przebieg jest gładki i bardzo przewidywalny. Podczas dalszych wykładów zobaczymy również, że z punktu widzenia rachunku różniczkowego funkcje te są bardzo "łatwy w obsłudze".

Na rysunku 1 widzimy, że funkcje potęgowe ($y = x^n$, dla potęg $n = 2, \dots, 5$) przecinają się przy $x = 0$ i $x = 1$. Jest to prawdą dla wszystkich dodatnich liczb całkowitych n .



Rysunek 1: Wykresy kilku funkcji potęgowych $y = x^n$. Wszystkie przecinają się w punktach $x = 0$ i $x = 1$. Gdy wartość potęgi n wzrasta, wykresy stają się bardziej płaskie w okolicach początku układu współrzędnych (0,0) i bardziej strome przy dużych wartościach x .

Ten sam rysunek ilustruje, także inny fakt, pomocny przy szkicowaniu krzywych: im większa wartość potęgi n , tym bardziej płaski wykres w pobliżu początku układu współrzędnych i bardziej stromy dla $x > 1$.

Mówiąc bardziej ogólnie, funkcja potęgowa ma postać

$$y = f(x) = Kx^n,$$

gdzie n jest dodatnią liczbą całkowitą, a K , czasami nazywany współczynnikiem, to stała. Do tej pory porównaliśmy funkcje potęgowe, których $K = 1$. Możemy również rozszerzyć naszą dyskusję na bardziej ogólny przypadek.

Przykład 1.1 Znajdź punkty przecięcia i porównaj dwie funkcje potęgowe postaci

$$f_1(x) = ax^n, \quad i \quad f_2(x) = bx^m,$$

gdzie a i b są stałymi. Możesz założyć, że zarówno a , jak i b są dodatnimi liczbami.

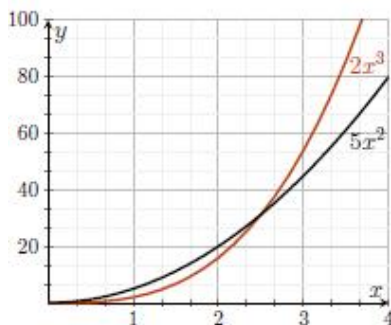
Rozwiązanie. To porównanie jest lekkim uogólnieniem poprzedniego przeprowadzonego rozumowania. Po pierwsze, zauważamy, że współczynniki a i b jedynie skalują pionowe zachowanie wykresu (tj. rozciągnij wykres wzdłuż osi Y). Nadal prawdą jest, że ta dwójka funkcje przecinają się przy $x = 0$; dalej, jak poprzednio, im wyższa potęga, tym bardziej płaski wykres dla wartości argumenty funkcji bliskich $x = 0$ i bardziej stromy dla dużych wartości x , zarówno dodatnich lub ujemnych. Jednak teraz drugi punkt przecięcia wykresów pojawia się, gdy

$$ax^n = bx^m, \Rightarrow x^{n-m} = \frac{b}{a}.$$

Tak więc rozwiązanie w pierwszej ćwiartce ma postać

$$x = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n-m}}. \quad (1)$$

Na rysunku 2 przedstawiono wykres dla konkretnego przykładu $f_1(x) = 5x^2$, $f_2(x) = 2x^3$.



Rysunek 2: Wykresy dwóch funkcji potęgowych, $y = 5x^2$ i $y = 2x^3$.

W pobliżu początku układu funkcja kwadratowa przyjmuje większą wartość, natomiast dla dużego x funkcja sześcienna przyjmuje większe wartości. Funkcje te przecinają się, gdy $5x^2 = 2x^3$, a więc gdy $x = 0$ lub $x = 2,5$.

Przykład 1.2 Wyznacz punkty przecięcia dla następujących par funkcji:

(a) $f_1(x) = 3x^4$ i $f_2(x) = 27x^2$,

(b) $f_1(x) = \frac{4}{3}\pi x^3$ i $f_2 = 4\pi x^2$.

Rozwiązanie. (a) Przecięcia występują przy $x = 0$ i przy $x = \mp \left(\frac{27}{3}\right)^{1/(4/2)} = \mp\sqrt{9} = \mp 3$.

(b) Te funkcje przecinają się przy $x = 0$ oraz $x = 3$, ale nie przecinają się dla ujemnych wartości x .

Zauważ, że w wielu przypadkach punkty przecięcia są liczbami niewymiernymi, których przybliżenia dziesiętne można uzyskać tylko za pomocą kalkulatora naukowego lub za pomocą jakiejś metody przybliżenia (takiej jak metoda Newtona, którą mam nadzieję omówimy w przyszłości). Mając już tylko te obserwacje dotyczące funkcji potęgowych, możemy spróbować zbadać problem biologiczny związany z komórkami. Spróbujmy dowiedzieć się, dlaczego komórki mają ograniczenie rozmiaru i od czego zależy ich wielkość.

1.2 Jak duża może być komórka?

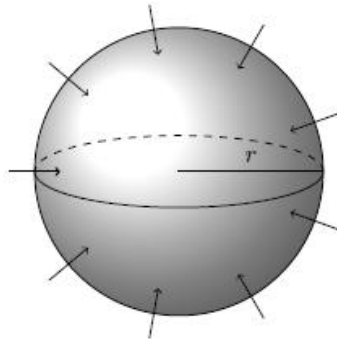
W celu podjęcia próby odpowiedzi na to pytanie wykorzystamy *model równowagi składników odżywczych*. Mamy już wystarczającą ilość narzędzi matematycznych, aby odpowiedzieć na te pytania. Szczególnie jeśli przyjmiemy, że komórka jest kulista. Oczywiście w przypadku większości komórek takie założenie nie jest spełnione. Kształty żywych komórek w wyjątkowy sposób odpowiadają ich funkcji. Wiele ma długie wypustki, części cylindryczne lub struktury podobne do gałęzi. Ale tutaj zaniedbujemy wszystkie te piękne zawiłości i zakładamy, że komórka ma kształt kulisty. Takie tego typu uproszczenia pojawiają się w procesie budowy modelu bardzo często gdyż pozwalają zbudować model możliwy do przeanalizowania przy wykorzystaniu matematyki i jednocześnie dający wartościowy wgląd w badane zjawisko. Model matematyczny to po prostu przedstawia rzeczywistą sytuację w uproszczonej postaci, która uwzględnia jedynie najważniejsze aspekty i zaniedbuje lub idealizowane skomplikowane szczegóły badanego zagadnienia. Kierując się tą myślą, przyjmując rozsądny zestawem założeń natury biologicznej, postaramy się przeanalizować, w jaki sposób równowaga składników odżywczych może wpływać na wielkość komórek i ograniczać jej rozmiar.

1.3 Budowanie modelu.

W celu budowy modelu przyjmujemy pewne założenia upraszczające a następnie sformułujemy je w języku matematyki. Model opieramy na następujących założeniach natury biologicznej:

1. Komórka ma w przybliżeniu kulisty kształt (patrz rysunek 3).
2. Komórka pochłania przez swoją powierzchnię tlen i składniki odżywcze. Im większa powierzchnia, S , tym większa całkowita szybkość wchłaniania. Zakładamy, że tempo, w jakim składniki odżywcze (lub tlen) są wchłaniane, jest proporcjonalne do powierzchni komórki.

3. Tempo, w jakim składniki odżywcze są zużywane w procesie metabolizmu jest proporcjonalne do objętości, V , komórki. Im większa objętość, tym więcej składniki odżywcze jest potrzebnych do utrzymania komórki przy życiu.



Rysunek 3: Sferyczna komórka o promieniu r wchłania składniki odżywcze w tempie proporcjonalnym do jej powierzchni S , ale zużywa składniki odżywcze proporcjonalnie do jej objętości V .

Definiujemy następujące wielkości opisujące pojedynczą komórkę w modelu:

A - szybkość wchłaniania składników odżywczych netto na jednostkę czasu,

C - szybkość netto zużycia składników odżywczych na jednostkę czasu,

V - objętość komórki,

S - powierzchnia komórki,

r - promień komórki.

Teraz przeformułujemy założenia na język matematyki. Zgodnie z założeniem 2 szybkość wchłaniania, A , jest proporcjonalna do S : to znaczy, że

$$A = k_1 S,$$

gdzie k_1 jest stałą proporcjonalności. Ponieważ wchłanianie i powierzchnia są wielkościami dodatnimi, tylko dodatnie wartości stałej proporcjonalności mają sens biologiczny, tak więc możemy ograniczyć się do k_1 będących liczbą dodatnią. Wartość tej stałej zależy od właściwości błony komórkowej, takie jak jej przepuszczalność lub liczba porów umożliwiających przepływ składników odżywczych. Używając odpowiedniej stałej proporcjonalności będziemy w stanie przeanalizować różne typy komórek.

Przy założeniu 3, tempo zużycia składników odżywczych, C jest proporcjonalne do V , tak więc

$$C = k_2 V,$$

gdzie $k_2 > 0$ jest drugą (dodatnią) stałą proporcjonalności. Wartość k_2 zależy od metabolizmu komórki, czyli jak szybko zużywa ona składniki odżywcze. Ponieważ zakładamy kulisty kształt komórki więc

$$S = 4\pi r^2, \quad V = \frac{4}{3}\pi r^3. \quad (2)$$

Zestawienie tych faktów prowadzi do następujących relacji między wchłanianie składników odżywczych A , ich zużyciem C i promieniem komórki r :

$$\begin{aligned} A &= k_1(4\pi r^2) = (4\pi k_1)r^2, \\ C &= k_2\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = \left(\frac{4}{3}\pi k_2\right)r^3. \end{aligned}$$

Przedstawiając te związki w postaci funkcji zależnych od r otrzymujemy

$$A(r) = (4\pi k_1)r^2, \quad \text{oraz} \quad C(r) = \left(\frac{4}{3}\pi k_2\right)r^3. \quad (3)$$

Tak więc A oraz C są po prostu funkcjami potęgowymi promienia komórki, r ,

$$A(r) = ar^2, \quad C(r) = cr^3,$$

gdzie $a = 4\pi k_1$ i $c = \frac{4}{3}\pi k_2$ stałymi zależnymi od kształtu komórki i parametrów życiowych komórki k_1 i k_2 , wchłaniania i zużycia.

Uwaga: Dla odżywiania wykładnik wynosi $n = 3$ natomiast dla wchłaniania wykładnik wynosi $n = 2$.

1.4 Bilans składników odżywczych zależy od wielkości komórek.

Omawiając problem rozmiaru komórki, otrzymaliśmy dwie funkcje potęgowe zależne od promienia komórki r . Funkcje te to wchłanianie składników odżywczych $A(r)$ i zużycie $C(r)$ zdefiniowane w (3). Teraz możemy na przykład odpowiedzieć na pytanie, czy wchłanianie lub spożywanie składniki odżywcze dominują w przypadku małych, średnich i dużych komórek.

Przykład 1.3. Przy jakim rozmiarze komórki tempo zużycie jest dokładnie zbilansowane przez szybkość wchłaniania? Zużycie czy absorpcja dominuje w przypadku małych komórek? Jak to jest w przypadku dużych komórek?

Rozwiązanie. Oba procesy "równoważą się" (czyli wykresy funkcji $A(r)$ i $C(r)$ przecinają się), gdy

$$A(r) = C(r) \Rightarrow \left(\frac{4}{3}\pi k_2\right)r^3 = (4\pi k_1)r^2.$$

Trywialnym rozwiązaniem tego równania jest $r = 0$.

Uwaga: to rozwiązanie nie jest interesujące biologicznie, ale nie powinniśmy o tym zapominać w matematycznej analizie tych problemów.

Jeśli $r \neq 0$, to możemy podzielić obie strony równości przez r^2 co daje:

$$r = 3\frac{k_1}{k_2}.$$

Oznacza to, że wskaźniki wchłaniania i zużycia są równe dla komórek tego rozmiar. Dla małego r , funkcja potęgowa z mniejszym wykładnikiem (czyli $A(r)$) dominuje, ale dla bardzo dużych wartości r dominuje funkcja potęgowa z wyższą potęgą r (czyli $C(r)$). Wynika z tego, że w przypadku mniejszych komórek absorpcja jest procesem dominującym, natomiast w przypadku większych komórek zużycie dominuje. Dochodzimy także do wniosku, że komórki których promień r jest większy niż rozmiar krytyczny, $r_{max} = 3\frac{k_1}{k_2}$,

nie są w stanie nadażyć za zapotrzebowaniem na składniki odżywcze i nie mogą przetrwać, ponieważ konsumpcja przewyższa wchłanianie składników odżywczych.

Korzystając z powyższego prostego argumentu geometrycznego, wydedukowaliśmy że rozmiar komórki ma silny wpływ na jej zdolność do wystarczająco szybkiego wchłaniania składników odżywczych lub tlenu tak aby się utrzymać przy życiu. Z tych powodów komórki większe niż maksymalny rozmiar (w przybliżeniu o średnicy około 1[mm]) rzadko występują w przyrodzie.

Podobna strategia pozwala nam również rozważyć bilans energetyczny i zrównoważony charakter życia na Ziemi.

1.5 Zrównoważony rozwój i bilans energetyczny na Ziemi.

Trwałość życia na planecie Ziemia zależy od doskonałej równowagi między temperaturą oceanów i mas lądowych oraz zdolności do form żywych do tolerowania zmian klimatycznych. Wprowadzamy prosty model bilansu energetycznego Ziemi do i w przybliżeniu oszacujemy temperaturę na Ziemi. Budując model weźmiemy pod uwagę następujące podstawowe założenia:

1. Energię pobieraną przez Ziemię od Słońca, biorąc pod uwagę promień Ziemi r , można określić w przybliżeniu jako

$$E_{in} = (1 - a)S\pi r^2, \quad (4)$$

gdzie S to energia promieniowania słonecznego przypadająca na jednostkę powierzchni (**stała słoneczna**), natomiast $0 < a < 1$ jest ułamkiem tej energii odbitej (**albedo**), zależnej od zachmurzenia i innej cech planety (takie jak procent lasów, śniegu, pustyni i oceanu).

2. Energia utracona przez Ziemię w wyniku promieniowania w kosmos, jej ilość jest zależna od obecnej temperatury Ziemi T . Energie ta jest w przybliżeniu równa

$$E_{out} = 4\pi r^2 \epsilon \sigma T^4, \quad (5)$$

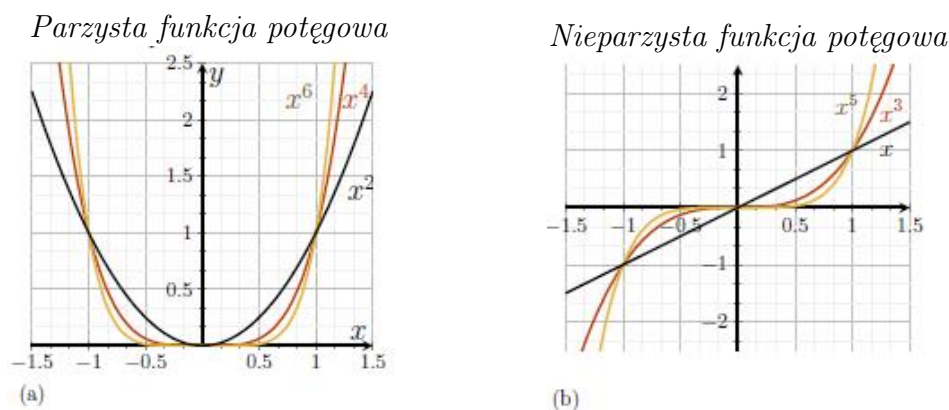
gdzie ϵ jest emisyjnością atmosfery ziemskiej. Za pomocą tej wielkości reprezentowana jest tendencja Ziemi do emitowania energii promieniowania. Ta stała zależy od pokrywy chmur, ilości pary wodnej, a także stężenia gazów cieplarnianych w atmosferze. Stała σ jest stałą promieniowania ciała doskonale czarnego (stała fizyczna Stefana-Boltzmanna).

Przykład 1.4 Wyjaśnij w jakim sensie powyższe formy energii można postrzegać jako funkcje potęgowe oraz jakiego typu funkcje potęgowe reprezentują. Wyjaśnij, w jaki sposób powyższe informacje można wykorzystać do określenia temperatury Ziemi, czyli temperatury, przy której energie przychodzącego i wychodzącego promieniowania zrównoważą się.

1.6 Parzyste i nieparzyste funkcje potęgowe.

Do tej pory rozważaliśmy funkcje potęgowe $y = x^n$ dla $x > 0$. Jednak jeśli chodzi o ogólność matematyczną, nie ma powodu, aby ograniczać zmienną niezależną x do wartości dodatnich. Przeanalizujemy teraz niektóre pojawiające się właściwości dla funkcji potęgowej określonej dla wszystkich liczb rzeczywistych. Na rysunku 4(a) widzimy, że wykresy

funkcji potęgowych z parzystą potęgą, np. tak jak $y = x^2$, $y = x^4$ i $y = x^6$, są symetryczne względem osi Y. Na rysunku 4(b) możemy zauważyć, że wykresy funkcji potęgowych mające nieparzystą potęgę, na przykład $y = x$, $y = x^3$ oraz $y = x^5$ są symetryczne po obrocie o 180° wokół początku.



Rysunek 4: Wykresy funkcji potęgowych. (a) Kilka parzystych funkcji potęgowych: $y = x^2$, $y = x^4$ i $y = x^6$. (b) Nieparzyste funkcje potęgowe: $y = x$, $y = x^3$ i $y = x^5$. Zwróć uwagę na własność symetrii.

Przypomnijmy definicje funkcji parzystych i nieparzystych.

Definicja. Mówimy, że funkcja rzeczywista $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest parzysta jeśli dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi równość

$$f(-x) = f(x).$$

Gdy dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi równość

$$f(-x) = -f(x),$$

to mówimy, że funkcja jest nieparzysta.

Przykład 1.5 Pokaż, że funkcja $y = g(x) = x^2 - 3x^4$ jest funkcją parzystą.

Rozwiązanie. Aby g było funkcją parzystą, powinna spełniać równanie $g(-x) = g(x)$.

$$g(-x) = (-x)^2 - 3(-x)^4 = x^2 - 3x^4 = g(x).$$

Tutaj użyliśmy faktu, że $(-x)^n = (-1)^n x^n$, a gdy n jest parzyste, to $(-1)^n = 1$.

Uwaga. Wszystkie funkcje potęgowe są ciągłe i nieograniczone.

Opierając się na funkcji potęgowej, można definiować teraz funkcje składa się z tego typu funkcji. W ten sposób można otrzymać wielomiany (sumy funkcji potęgowych) i funkcje wymierne (ilorazy wielomianów).

Przykład 1.7. Naszkicuj wykres funkcji wielomianowej

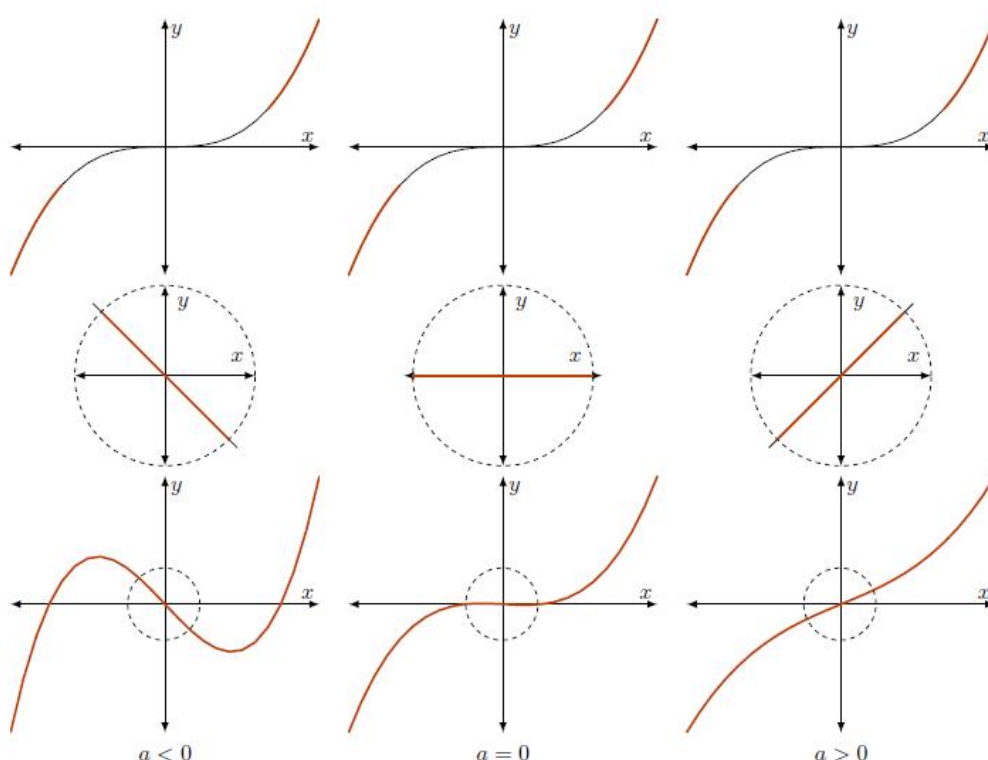
$$y = p(x) = x^3 + ax.$$

Jak zmienia się wykres, gdyby stała a zmieniła się z dodatniej na ujemną?

Rozwiązanie. Wielomian z przykładu ma dwa składniki, z których każdy to funkcja potęgowa. Rozważmy te składniki indywidualnie. W pobliżu początku, dla $x \approx 0$ dominuje ax , tak więc blisko $x = 0$ funkcja zachowuje się jak

$$y \approx ax,$$

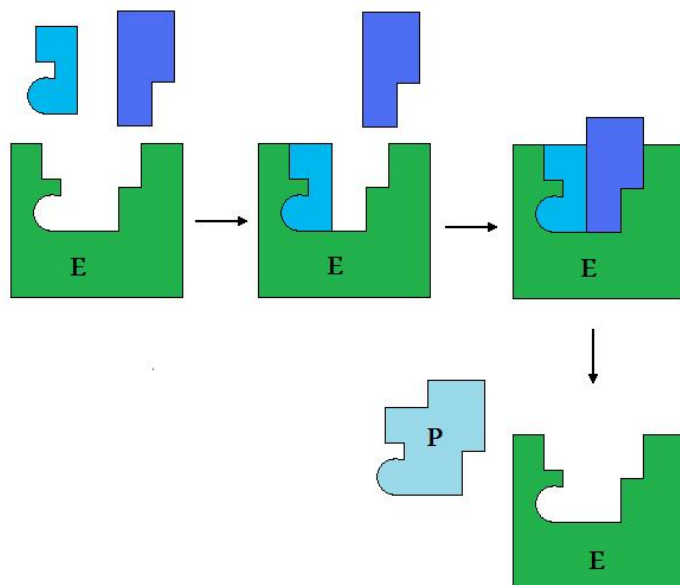
a więc jak prosta o nachyleniu a . Stąd w pobliżu początku układu, jeśli $a > 0$ to zobaczymy linię o dodatnim nachyleniu, a jeśli $a < 0$, to linii o ujemnym nachyleniu. Daleko od początku układu dominuje funkcja $y = x^3$ tak więc przy dużych (dodatnich lub ujemnych) wartościach x . Rysunek 5 stanowi ilustruje.



Rysunek 5: Wykres wielomianu $y = p(x) = x^3 + ax$ można otrzymać analizując wykresy dwóch funkcji potęgowych, które są jej składnikami. Funkcja sześcienna $y = x^3$ (górny wiersz) dominuje dla dużych wartości x , podczas gdy część liniowa $y = ax$ (środkowy wiersz) dominuje w pobliżu początku układu. Kiedy te dwa wykresy płynnie połączymy (dolny wiersz) uzyskamy szkic żadanego wielomianu. Pokazano tutaj trzy możliwości dla $a < 0$, $a = 0$, $a > 0$, od lewej do prawej. Wartość a określa nachylenie krzywej w pobliżu $x = 0$, a tym samym wpływa również na obecność lokalnego maksimum i minimum (dla $a < 0$).

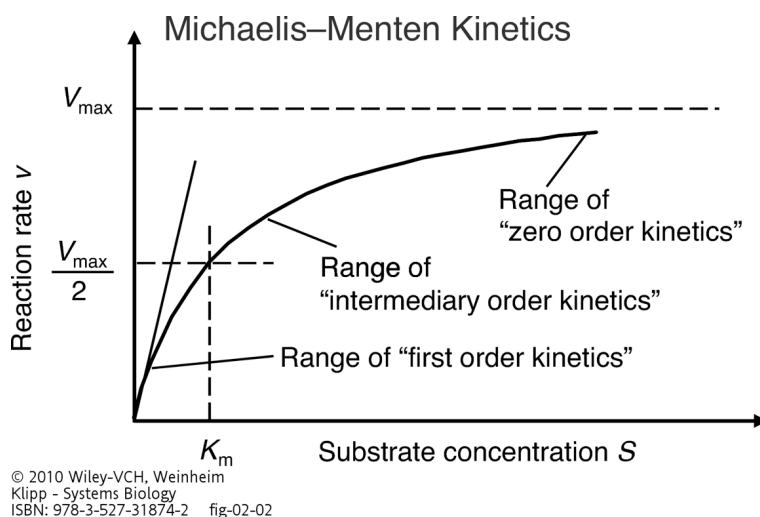
1.7 Szybkość reakcji katalizowanej enzymatycznie

Reakcje biochemiczne są często oparte na działaniu białek zwanych enzymami. Białka te katalizują reakcję w żywych komórkach. Na rysunku 6 przedstawiono schemat reakcji enzymatycznej. Enzym **E** wiąże się ze swoim substratem **S**, tworząc kompleks **C**. Kompleks



Rysunek 6: Schemat reakcji enzymatycznej w modelu "klucz i zamek".

rozpada się w produkt, **P** i oryginalny enzym, który może działać ponownie. Stężenie substratu jest zwykle znacznie większe niż stężenie enzymu. W kontekście tego przykładu x oznacza stężenie substratu w mieszaninie reakcyjnej. Szybkość reakcji, v (a mianowicie szybkość przy jakiej produkt jest tworzony) zależy od x . Kiedy wykreślimy prędkość reakcji jako funkcji stężenia, widać, że nie jest to funkcja liniowa. Rysunek 7 przedstawia typowy przebieg tej zależności.



Rysunek 7:

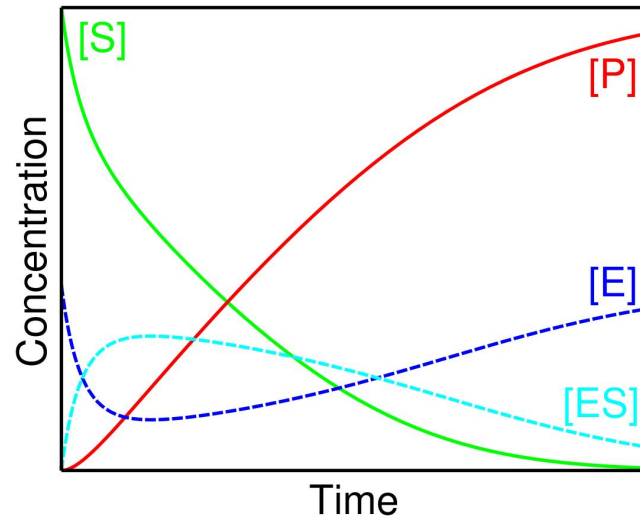
Zależność opisująca kinetykę reakcji enzymatycznej zaproponowana przez Michaelisa i Menten ma postać: prędkość reakcji $= v(x) = \frac{Kx}{k_n+x}$, gdzie $K, k_n > 0$ są stałymi specyficznymi dla enzymu i warunków w jakich przebiega reakcja.

Równanie Michaelisa-Menten ma postać funkcji wymiernej. Ponieważ x jest koncentracją, musi być wielkością dodatnią, więc ograniczamy uwagę do $x \geq 0$. Wyrażenie (6) jest szczególnym przypadkiem funkcji wymiernej, czyli funkcji postaci

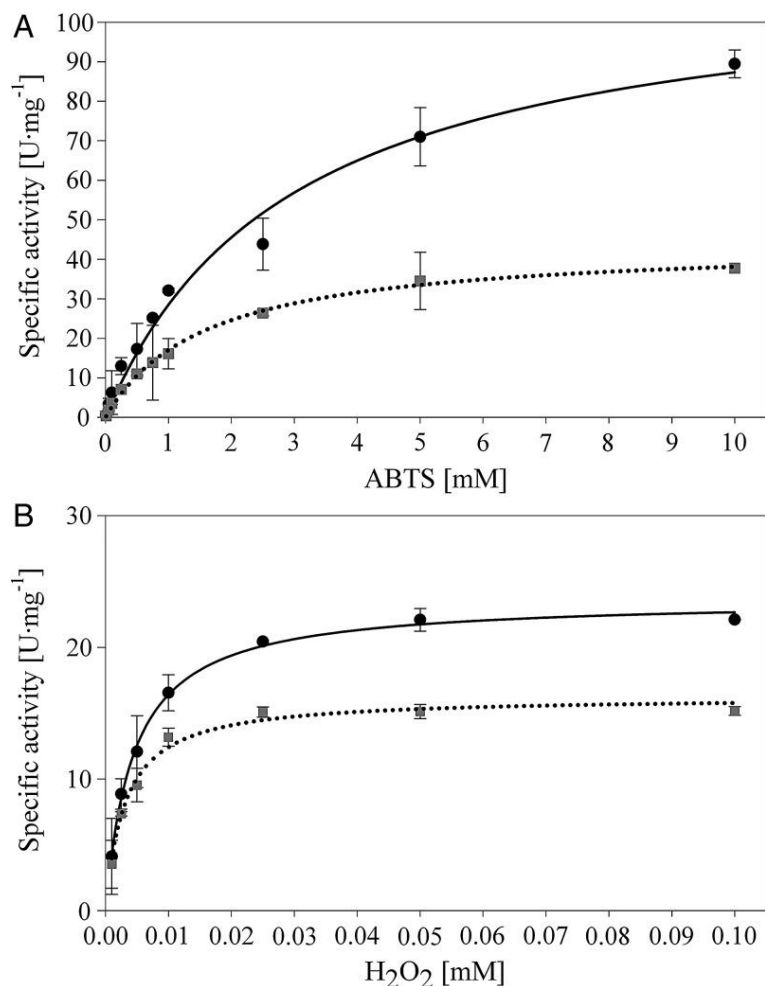
$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

gdzie $P(x)$ i $Q(x)$ są wielomianami. W przypadku (1.8) zarówno $P(x)$ jak i $Q(x)$ są wielomianami stopnia pierwszego. Można poczynić następujące obserwacje

1. Wykres funkcji (6) przechodzi przez początek układu współrzędnych.
2. W pobliżu początku układu, początkowy wzrost wykresu "wygląda jak" linia prosta. Możemy to zobaczyć, biorąc pod uwagę wartości x , które są znacznie mniejsze niż k_n . Wtedy mianownik (k_n+x) jest dobrze przybliżony przez stałą k_n . Zatem dla małych wartości x , $v \approx (K/k_n)x$, tak że wykres przypomina linię prostą przechodzącą przez początek układu o nachyleniu (K/k_n) .
3. W przypadku dużych wartości x mamy do czynienia z poziomą asymptotą co sprawi, że dla $x \gg k_n$, (dla x dużo większych niż k_n), v jest w przybliżeniu stałe przy dostatecznie dużym x .



Rysunek 8: Wykres zależności stężeń substratów, S , enzymów związanych, EP , enzymów w postaci wolnej, E , oraz produktów, P , od czasu przebiegu reakcji enzymatycznej.



Rysunek 9: Porównanie danych empirycznych i dopasowanej kinetyki Michaelisa-Menten.

Problem 1.6 Model Bevertona-Holta wiąże liczbę łososi w populacji w tym roku N_1 z liczbą łososi, które były obecne w populacji w zeszłym roku N_0 . Zależność ta ma postać

$$N_1 = k_1 \frac{N_0}{(1 + k_2 N_0)}, \quad k_1, k_2 > 0. \quad (6)$$

Naszkicuj N_1 jako funkcję N_0 i wyjaśnij, jak wpływ na ten wykres mają stałe k_1 i k_2 . Czy istnieje poziom populacji N_0 , dla którego poziom w następnym roku czyli N_1 był by dokładnie taki sam. A więc liczebność populacji w kolejnych latach nie ulegała by zmianom. Czy są jakieś ograniczenia na k_1 lub k_2 , aby ten rodzaj statycznej równowagi populacji był możliwy?

Problem 1.7 (Biedronki jedzące mszyce). Rozpatrzmy problem wzrostu populacji, w kontekście kontroli biologicznej szkodników, na przykładzie wzrostu populacji biedronek i mszyc. Biedronki to drapieżniki, które zjadają mszyce będące ich ofiarami. Niech x oznacza liczbę mszyc przypadającą na jednostkę powierzchni (zagęszczenie ofiar). Liczbę mszyc zjadanych przez biedronkę z jednostkowej powierzchni w jednostce czasu będziemy nazywać wskaźnikiem drapieżnictwa i oznaczać przez $P(x)$. Wskaźnik drapieżnictwa zwykle zależy od gęstości ofiar, a tę zależność można w przybliżeniu przedstawić jako

$$P(x) = K \frac{x^n}{a^n + x^n}, \quad \text{gdzie } K, a > 0. \quad (7)$$

W przypadku biedronek i mszyc na podstawie danych empirycznych można przyjąć $n = 2$, (patrz rysunek 10).

¹ MP Hassell, JH Lawton, and JR Beddington. Sigmoid functional responses by invertebrate predators and parasitoids. *The Journal of Animal Ecology*, 46(1):249–262, 1977

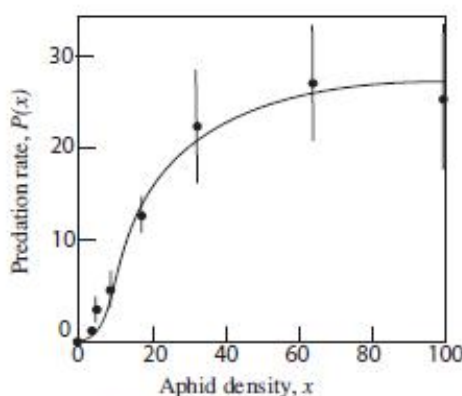


Figure 1.11: The predation rate of a ladybug depends on its aphid (prey) density.

Rysunek 10: Współczynnik drapieżnictwa biedronek w zależności od zagęszczenia mszyc (ofiary).

Mszyce rozmnażają się w tempie proporcjonalne do ich liczebności, i tempo wzrostu populacji mszyc G , (liczba nowych mszyc na godzinę), wynosi

$$G(x) = rx, \quad \text{gdzie } r > 0. \quad (8)$$

- (a) Dla jakiej gęstości populacji mszyc x wskaźnik drapieżnictwa zrównoważy tempo wzrostu populacji mszyc?
- (b) Czy są sytuacje, w których wskaźnik drapieżnictwa nie może zrównoważyć wzrostowi populacji mszyc? Przedstaw swoje wyniki za pomocą stałych K , a , r .

Krzysztof Topolski