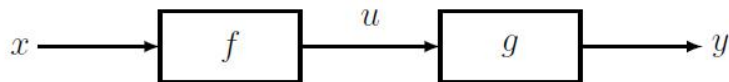


1 Wykład 6. (Pochodna funkcji złożonej).

Do tej pory celowo wybieraliśmy przykłady, w których różniczkowane funkcje były funkcjami potęgowymi, wielomianami lub funkcjami wymiernymi. W ten sposób staraliśmy się skupić na definicji pochodnej oraz regułach różniczkowania a nie na problemach natury technicznej związanych z wyznaczaniem pochodnych funkcji o skomplikowanej postaci. Teraz wprowadzimy zasadę różnicowania, która znacznie rozszerzy repertuar funkcji, których pochodne jesteśmy w stanie wyznaczyć. Pozwala nam to analizować modele znacznie większej liczby procesów biologicznych.

1.1 Funkcja złożona.

Rysunek 1 ilustruje operację składania dwóch funkcji: Funkcja f przypisuje zmiennej niezależnej x wartość $u = f(x)$ natomiast funkcja g przypisuje tak otrzymanej wartości u nową wartość $y = g(u)$.



Rysunek 1: Złożenie funkcji.

Złożenie tych dwóch operacji przypisuje zmiennej x wartość $y = f(g(x))$. Ta dwuetapowa operacja definiuje nową funkcję $h(x) = g(f(x))$, którą nazywamy złożeniem funkcji f z funkcją g .

Przykład 1. Rozważmy dwie funkcje $f(x) = \sqrt{x}$ i $g(x) = x^2 + 1$. Określać funkcje otrzymane przez złożenie:

- (a) $h_1(x) = g(f(x))$,
- (b) $h_2(x) = f(g(x))$.

Rozwiązanie.

- (a) Dla h_1 najpierw stosujemy przekształcenie przez funkcję f , a następnie przez funkcję g , więc

$$h_1(x) = (\sqrt{x})^2 + 1 = x + 1, \text{ pod warunkiem, że } x \geq 0.$$

- (b) Dla h_2 funkcje są nakładane w odwrotnej kolejności, tak że

$$h_2(x) = \sqrt{x^2 + 1} \text{ tym razem dla dowolnego rzeczywistego } x.$$

Zauważmy, że dziedziny tych dwóch funkcji są nieco inne: funkcja h_1 jest zdefiniowana tylko dla $x \geq 0$, gdyż $f(x)$ nie jest zdefiniowane dla x ujemnego, podczas gdy h_2 jest zdefiniowana dla wszystkich rzeczywistych x .

Przykład 2. Wyraż funkcję $h(x) = 5(x^3 - x^2)^{10}$ jako złożenie dwóch funkcji.

Rozwiązanie. Możemy to zrobić zapisując $h(x) = g(f(x))$, gdzie $f(x) = x^3 - x^2$ i $g(x) = 5x^{10}$.

1.2 Reguła łańcucha różniczkowania złożenia funkcji.

Mając daną funkcję złożoną postaci $y = f(g(x))$, wyznaczamy jej pochodną względem zmiennej x , korzystając z następującej reguły różniczkowania.

Zasada łańcucha.

Jeśli $y = f(u)$ i $u = g(x)$ są dwiema funkcjami, to pochodna funkcji złożonej $y = h(x) = f(g(x))$ jest równa

$$\frac{d[f(g(x))]}{dx} = \frac{dh}{dx} = \frac{y}{du} = \frac{df}{du} \frac{du}{dx},$$

lub w innej notacji

$$[f(g(x))]' = g'(x) \cdot f'(g(x)).$$

Nieformalnie reguła łańcucha stwierdza, że zmiana w $y = f(g(x))$ względem x to a iloczyn dwóch zmian:

- tempa zmiany y bezpośrednio w odniesieniu do u , i
- tempa zmiany u w odniesieniu do x .

Dlaczego ta reguła jest poprawna? Chociaż pochodna nie jest prostym ilorazem, intuicyjne zrozumienie reguły łańcucha możemy uzyskać pisząc

$$\frac{dy}{dx} \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \frac{\Delta u}{\Delta x},$$

wtedy jest oczywiste, że "anulowanie" wyrazu Δu w liczniku i mianowniku prowadzi do właściwego ułamka po lewej stronie. Formalny dowód reguły łańcucha wykorzystuje tę ideę, ale zwraca uwagę na to aby Δu było niezerowe i uniknąć wyrażenia nieoznaczonego $0/0$.

Przykład 3. Oblicz pochodną funkcji $h(x) = 5(x^3 - x^2)^{10}$.

Rozwiązanie. Funkcję wyrażamy jako $y = h(x) = 5u^{10}$, gdzie $u = (x^3 - x^2)$ i stosujemy regułę łańcucha.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = (d(5u^{10})du) \left(\frac{d(x^3 - x^2)}{dx} \right) = 50u^9(3x^2 - 2x).$$

Podstawienie za $u = (x^3 - x^2)$ prowadzi do

$$\frac{dy}{dx} = 50(x^3 - x^2)^9(3x^2 - 2x).$$

Przykład 4. Oblicz pochodną funkcji $y = f(x) = \sqrt{x^2 + a^2}$, gdzie a jest dodatnią liczbą rzeczywistą.

Rozwiązanie. Funkcję tę można rozpatrywać jako złożenie funkcji $g(u) = \sqrt{u} = u^{1/2}$ i funkcji $u(x) = x^2 + a^2$, czyli możemy napisać $f(x) = g(h(x))$. Teraz korzystając z reguły łańcucha otrzymujemy

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \cdot (x^2 + a^2)^{-1/2} \cdot 2x = \frac{x}{(x^2 + a^2)^{1/2}} = \frac{x}{(x^2 + a^2)^{1/2}}.$$

Przykład 5. Oblicz pochodną funkcji

$$y = f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}},$$

gdzie a jest dodatnią liczbą rzeczywistą.

Rozwiązanie. Tym razem do obliczeń użyjemy zarówno reguły dotyczącej różniczkowania ilorazu funkcji, jak i reguły łańcucha.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{[x]' \cdot \sqrt{x^2 + a^2} - [\sqrt{x^2 + a^2}]' \cdot x}{(\sqrt{x^2 + a^2})^2}.$$

Tutaj $[\dots]'$ oznacza różniczkowanie.

Upraszczamy wyrażenie algebraicznie, mnożąc licznik i mianownik przez $(x^2 + a^2)^{1/2}$ i ostatecznie otrzymujemy

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + a^2 - x^2}{(x^2 + a^2)^{1/2}(x^2 + a^2)} = \frac{a^2}{(x^2 + a^2)^{3/2}}.$$

1.3 Interpretacja reguły łańcucha.

Zamiast przytaczać formalny dowód reguły łańcucha przedstawimy kilka przykładów, które mamy nadzieję, że pomogą zrozumieć, dlaczego reguła łańcucha jest oparta na iloczynie dwóch szybkości zmian.

Przykład 6. (Poziom zanieczyszczenia jeziora). *Gatunki większości ryby są wrażliwe na obecność zanieczyszczeń w jeziorze. Ponieważ ludzie zaludniają obszar wokół jezior, liczebność populacji ryb zwykle zmniejsza się gdy zwiększa się poziom zanieczyszczenia jeziora. Określ ilościowo szybkość z jaką poziom zanieczyszczeń zmienia się w czasie w zależności od wielkości wytwarzanego zanieczyszczenia przypadającego na jednego człowieka i tempa wzrostu populacji ludzkiej.*

Rozwiązanie. Tempo zmian (w tym przypadku spadku) populacji ryb zależy od:

- tempo zmian populacji ludzkiej oraz
- tempo zmian zanieczyszczenia wytwarzanego na osobę.

Jeśli którykolwiek z nich wzrasta, wpływ na populację ryb również wzrasta. Reguła łańcucha oznacza, że efekt netto jest iloczynem tych dwóch szybkości zmian. Formalnie dla czasu t , na przykład w latach, niech $x = f(t)$ określa liczbę osób nad jeziorem w roku t , natomiast $p = g(x)$ zanieczyszczenie wytworzone przez x osób. Tempo zmian zanieczyszczenia p w czasie jest iloczynem $g'(x)$ i $f'(t)$:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{dp}{dx} \frac{dx}{dt} = g'(x)f'(t).$$

Przykład 7. (Populacja drapieżników, roślinożernych ofiar i roślinności). *Populacja dużych drapieżników, C , na afrykańskiej sawannie zależy od populacji gazeli będących ich ofiarami P . Populacja gazeli z kolei zależy od obfitości roślinności V , która zależy od ilości deszczu w danym roku, r . Określ ilościowo tempo zmian populacji drapieżników w odniesieniu do opadów.*

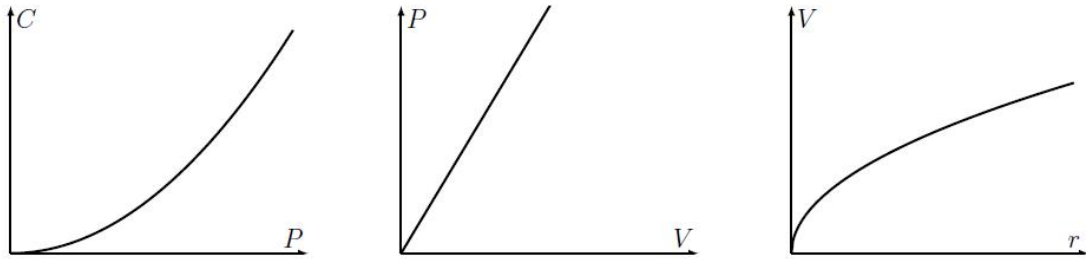
Rozwiązanie. Zależności te możemy wyrazić za pomocą hipotetycznych funkcji

$$V = g(r), \quad P = f(V), \quad \text{oraz} \quad C = h(P),$$

z których każda przedstawia zależność w łańcuchu pokarmowym. Susza, która zmniejsza opady, zmniejsza również obfitość roślinności. To następnie zmniejsza populację gazeli i ostatecznie wpływa na populację drapieżników. Tempo zmian wielkości populacji drapieżników w zależności od opadów, dC/dr , zgodnie z regułą łańcucha, wynosi

$$\frac{dC}{dr} = \frac{dC}{dP} \cdot \frac{dP}{dV} \cdot \frac{dV}{dr}$$

Przykład 8. (Populacja drapieżników). Rozważ przykład 7 z przykładami konkretnych relacji między mięsożercami a ofiarami, $C = h(P) = P^2$, między ofiarami i roślinnością, na której żeruje, $P = f(V) = 2V$, oraz zależności roślinność na deszczu, $V = g(r) = r^{1/2}$. Określ ilościowo tempo zmian populacji drapieżników w odniesieniu do opadów.



Rysunek 2: Przykład, w którym populacja drapieżników zależy od zdobyczy P zgodnie z $C = h(P) = P^2$, podczas gdy ofiary drapieżnika zależą od roślinności, $P = f(V) = 2V$, a roślinność zależy od opadów $V = g(r) = r^{1/2}$.

Rozwiązanie. Obliczamy wszystkie niezbędne pochodne,

$$\frac{dV}{dr} = \frac{1}{2}r^{-1/2}, \quad \frac{dP}{dV} = 2, \quad \frac{dC}{dP} = 2P,$$

tak więc z przykładu 7 wynika, że tempo zmian drapieżników w odniesieniu do opadów jest równe

$$\frac{dC}{dr} = \frac{dC}{dP} \frac{dP}{dV} \frac{dV}{dr} = \frac{1}{2}r^{-1/2} \cdot 2 \cdot 2P = \frac{2P}{r^{1/2}}.$$

Korzystając z faktu, że $V = r^{1/2}$ i $P = 2V$, otrzymujemy

$$\frac{dC}{dr} = \frac{2P}{V} = \frac{2 \cdot 2V}{V} = 4.$$

Przykład 9. (Temperatura Ziemi i gazy cieplarniane). Na jednym z poprzednich wykładów stwierdziliśmy, że temperatura Ziemi zależy od albedo a (odbity ułamek energii promieniowania przychodzącego) zgodnie z formułą

$$T = \left[\frac{(1-a)S}{\epsilon \sigma} \right]^{1/4}.$$

Założmy, że albedo a jest jedyną wielkością zależną od poziomu gazów cieplarnianych G i że $\frac{da}{dG}$ jest znane. Określ, jak zmieni się temperatura gdy poziom gazów cieplarnianych G wzrośnie.

Rozwiązanie. Temperatura T zależy od poziomu gazów cieplarnianych G poprzez albedo a , więc piszemy $T(a(G))$. Tutaj S , ϵ i σ są stałymi, co upraszcza rachunki gdyż możemy zapisać T w postaci

$$T(a) = \left(\frac{S}{\epsilon\sigma}\right)^{1/4} (1-a)^{1/4}.$$

Zgodnie z regułą łańcucha

$$\frac{dT}{dG} = \frac{dT}{da} \frac{da}{dG}.$$

Tak więc

$$\frac{dT}{dG} = \left(\frac{S}{\epsilon\sigma}\right)^{1/4} \frac{d}{da} [(1-a)^{1/4}] \frac{da}{dG} = \left(\frac{S}{\epsilon\sigma}\right)^{1/4} \frac{1}{4} (1-a)^{(1/4)-1} (-1) \frac{da}{dG}.$$

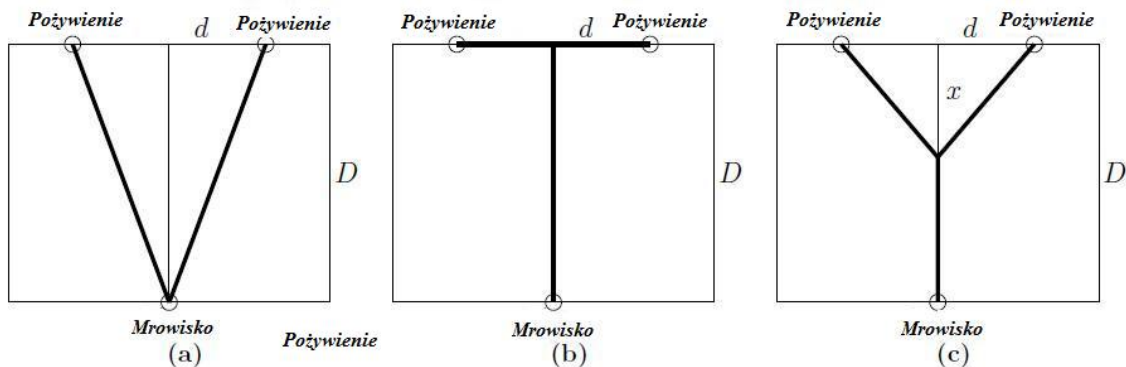
Porządkując otrzymujemy

$$\frac{dT}{dG} = -\frac{1}{4} \left(\frac{S}{\epsilon\sigma}\right)^{1/4} (1-a)^{-3/4} \frac{da}{dG}.$$

Uwaga. Ponieważ gazy cieplarniane wpływają zarówno na albedo Ziemi, jak i na jej emisyjność ϵ , więc aby określić wpływ gazów cieplarnianych na zmiany temperatury Ziemi powinniśmy rozważyć ogólniejszy model.

Uzbrojeni w regułę łańcucha możemy teraz różniczkować szerszą gamę funkcji. Pozwoli to nam na przykład analizować modele, w których pojawiają się zagadnienia optymalizacyjne.

Na zakończenie przytoczmy przykład zagadnienia optymalizacyjnego. Mrówki to dobrzy matematycy! Potrafią znaleźć najkrótszą trasę łączącą ich mrowisko ze źródłami pożywienia. Każda mrówka wydziela chemiczny feromon, za którym podążają inne mrówki. Ślad feromonowy wyznacza drogę, którą podążają mrówki do źródeł pożywienia. Feromony (komunikat chemiczny do oznakowania trasy) wyparowuje po chwili, więc dłuższy szlak jest słabiej oznakowany niż szlak krótszy. Po pewnym czasie prowadzi to do selekcji najkrótszej możliwej trasy. Na rysunku 3 przedstawiono typowy scenariusz testów laboratoryjnych: mrówkom ze sztucznego mrowiska oferuje się dwa równoważne źródła pożywienia. Możemy zapytać o trasę z najkrótszą całkowitą długością łączącą mrowisko i źródła pożywienia. Rozpatrzmy uproszczoną wersję problemu, który mrówki rozwiązują.

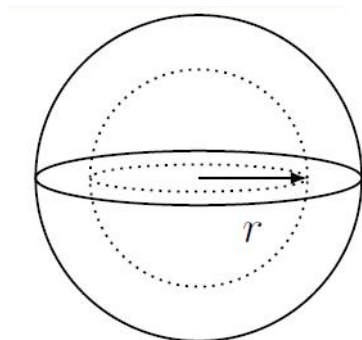


Rysunek 3: Trzy sposoby połączenia mrowiska z dwoma źródłami pożywienia, ścieżki (a) w kształcie litery V, (b) w kształcie litery T i (c) w kształcie litery Y.

Przykład 10. (Minimalizowanie całkowitej długości ścieżki). W sytuacji zilustrowanej na rysunku 3 określ długość najkrótszej ścieżki łączącej mrowisko z obydwoma źródłami pokarmu. Załóżmy, że $d \ll D$.

W wielu sytuacjach modelujemy procesy, które przebiegają w czasie. Często stawiamy pytanie, szybko zmieniają się pewne zmienne opisującą geometrię w czasie. W wiele z tych przykładów jesteśmy zmuszeni najpierw powiązać ze sobą różne zmienne opisujące geometrię obiektu, którego zmiany w czasie badamy. Zilustrujmy to na prostym przykładzie.

Przykład 11. (Wzrost guza). Promień guza litego rozszerza się ze stałą szybkością, k . Mamy określić tempo wzrostu objętości guza gdy jego promień wynosi $r = 1\text{ cm}$. Zakładamy, że guz jest w przybliżeniu kulisty jak pokazano na rysunku 4.



Rysunek 4: Wzrost kulistego guza. Ponieważ promień zmienia się z czasem, objętość również zmienia się w czasie. Używamy reguły łańcucha aby połączyć dV/dt z dr/dt .

Rozwiązanie. Objętość kuli o promieniu r wynosi $V(r) = (4/3)\pi r^3$. Tutaj r zmienia się w czasie, więc V również zmienia się z czasem. W tej sytuacji rozważamy funkcje $r(t)$ i $V(r(t))$, które opisują odpowiednio promień i objętość guza w chwili t . W tej sytuacji funkcja złożona pojawia się w naturalny sposób:

$$V(r(t)) = \frac{4}{3}\pi[r(t)]^3.$$

Możemy teraz skorzystać z reguły łańcucha aby wyznaczyć szybkość zmiany objętości guza w czasie.

$$\frac{d}{dt}V(r(t)) = \frac{dV}{dr} \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dr} \left(\frac{4}{3}\pi r^3 \right) \frac{dr}{dt} = \frac{4}{3}\pi \cdot 3r^2 \frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}.$$

Ponieważ przyjęliśmy założenie, że promień rozszerza się ze stałą szybkością, k , więc

$$\frac{dr}{dt} = k \quad \implies \quad \frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 k.$$

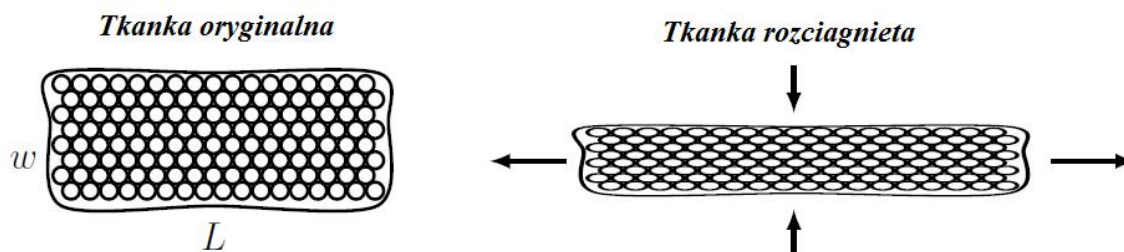
Stąd tempo wzrostu objętości jest proporcjonalne do kwadratu promienia; w rzeczywistości jest proporcjonalne do pola powierzchni kuli. W momencie, w którym $r = 1\text{ cm}$,

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi k.$$

Uwaga. Co ważne, znajomość wartości liczbowej, $r = 1\text{ cm}$, jest istotna jedynie na końcu obliczeń, po etapach różniczkowania i upraszczania otrzymanych wyrażeń.

Problem 12. (Wzrost komórki). Masa komórki to $m = \rho V$ gdzie V to objętość komórki, a ρ to gęstość komórek. (Zwykle gęstość komórek jest stała i zbliżone do gęstości wody, czyli $\rho = 1\text{g/cm}^3$). Wyznacz szybkość zmiany masy komórki w zależności od szybkości zmiany jej objętości i szybkości zmiany promienia w czasie. Załóż, że komórka ma kształt kulisty.

Przykład 13. Większość zwierząt jest dłuższa od "głowy" do "ogona" niż z boku na bok. Aby uzyskać względne wydłużenie wzdłuż jednej osi, zarodek podlega procesowi zwanemu convergent extension¹, w którym tkanki wydłuża się (rozciąga) wzdłuż jednej osi i zwężają wzdłuż drugiej osi, jak schematycznie pokazano na rysunku 5.



Rysunek 5: Rozszerzanie tkanki w rozwoju embrionalnym. Komórki wydłużają się wzdłuż jednej osi (co zwiększa L) podczas kurczą się wzdłuż drugiej osi (maleje w). Ponieważ objętość i grubość pozostają stałe, zmiany L mogą być powiązane ze zmianami w .

Załóżmy, że prostokątny blok tkanki o wymiarach $L = w = 10\text{ mm}$ i grubości $\tau = 1\text{ mm}$, rozciąga się w tempie 1 mm dziennie, natomiast objętość V i grubość τ pozostają stałe. W jakim tempie zmienia się szerokość gdy długość to $L = 20\text{ mm}$?

Rozwiązanie. Założyliśmy, że objętość V i grubość τ pozostają stałe. Na podstawie początkowej długości, szerokości i grubości możemy stwierdzić, że objętość wynosi $V = 10 \cdot 10 \cdot 1\text{ mm}^3$. Ponadto, w dowolnym momencie czasu t , objętość prostokątnego blok tkanki jest równa

$$V = L(t) \cdot w(t) \cdot \tau.$$

Objętość V zależy od L i w , z których obie zależą od czasu dlatego

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}[L(t)w(t)\tau] \implies 0 = (L'(t)w(t) + L(t)w'(t))\tau.$$

(Tutaj użyliśmy reguły różniczkowania iloczynu $L(t)w(t)$ względem t . Wykorzystaliśmy również fakt, że V jest stałe, więc jego pochodna wynosi zero, a τ jest stałą, więc mnoży pochodną $L(t)w(t)$, przez tą stałą). Rozwiązując tak otrzymane równanie ze względu na $w'(t)$ otrzymujemy

$$L'(t)w(t) + L(t)w'(t) = 0 \implies w'(t) = -\frac{L'(t)w(t)}{L(t)}.$$

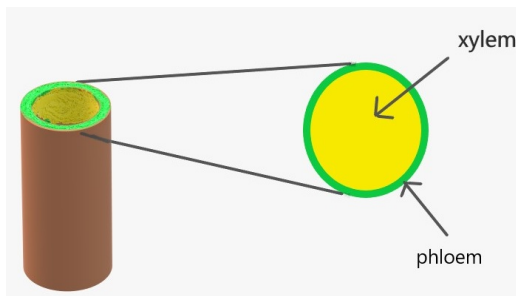
W tej chwili gdy $L(t) = 20$, szerokość tkanki jest równa $w(t) = V/(L(t)\tau) = 100/20 = 5$. Stąd

$$w'(t) = -\frac{L'(t)w(t)}{L(t)} = -\frac{1\text{ mm/dzień} \cdot 5\text{ mm}}{20\text{ mm}} = -0,25\text{ mm/dzień}.$$

Znak minus wskazuje, że w maleje, podczas gdy L rośnie.

¹Jeśli chcesz dowiedzieć się więcej na ten temat, zerknij na artykuł <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1534580702001971>

Problem 14. (Wzrost pnia drzewa). Rozważmy cylindryczny pień drzewa o promieniu R . Żywe komórki zajmują tylko ciekłą powłokę, grubości d , zaraz za korą drzewa. Wnętrze pnia składa się z martwych komórek, które zamieniły się w drewno.

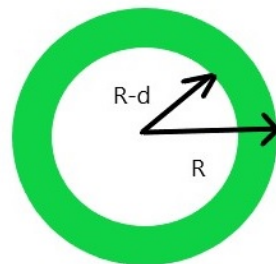


Rysunek 6: Cienka skorupa żywej tkanki (łyko) otacza martwą drewnianą część pnia drzewa (ksylem). Ułamek F z żywa tkanka zmienia się wraz ze wzrostem drzewa.

- Jaki ułamek, F , objętości pnia stanowi żywa tkanka?
- Jak zmienia się ułamek F wraz z rozwojem drzewa? Zakładamy, że promień pnia rośnie w stałym tempie, a grubość d żywej tkanki nie zmienia się?
- Oblicz szybkość zmiany F w chwili, gdy promień jest 5 razy większy od grubości d .

Wskazówka.

- Założ, że drewniane wnętrze jest cylindryczne, podobnie jak pień. Wyznacz objętość powłoki żywej tkanki poprzez odjęcie objętości tych dwóch cylindrów i wyznacz F .
- Oblicz pochodną dF/dt . Zanim zaczniesz obliczyć pochodną pamiętaj aby najpierw uprościć różniczkowane wyrażenie.



Rysunek 7: Promień pnia to R natomiast grubość łyka (żywa część pnia) jest równa d . Zakładamy cylindryczną geometrię pnia. F = ułamek objętości cienkiego fragmentu pnia, cylindryczna powłoka zainicjowana kolorem zielonym.

Krzysztof Topolski