

1 Wykład 7. (Badanie przebiegu funkcji).

Na podstawie pochodnej możemy wywnioskować pewne istotne informacje dotyczące zachowania się oryginalnej funkcji. Przyjrzyjmy się bliżej własności funkcji, które jesteśmy w stanie wywnioskować na podstawie jej pierwszej i drugiej pochodnej.

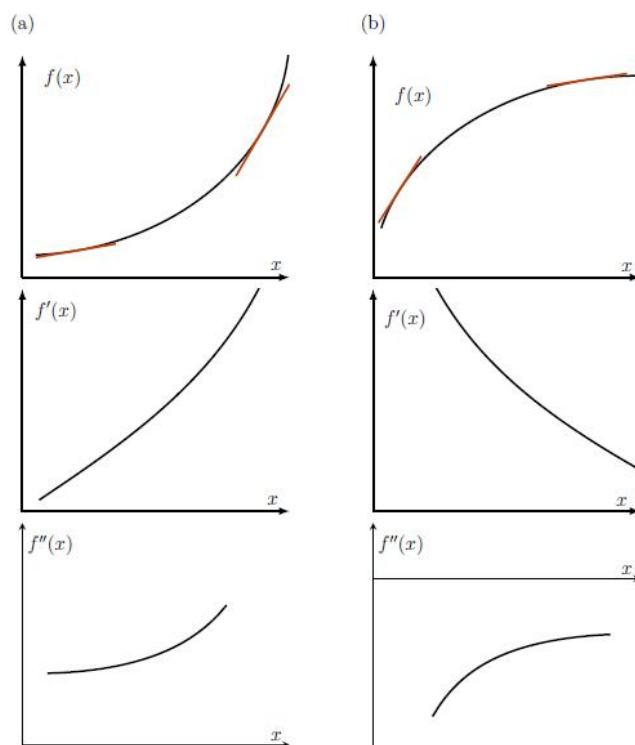
1.1 Funkcje rosnące i malejące.

Rozważmy funkcję $y = f(x)$. Zwróćmy uwagę na następujący fakt:

- Jeśli $f'(x) > 0$, to $f(x)$ rośnie.
- Jeśli $f'(x) < 0$, to $f(x)$ maleje.

Skorzystajmy z tej obserwacji w przypadku pochodnej, aby powiązać drugą pochodną $f''(x)$ z pierwszą pochodną $f'(x)$.

- Jeśli $f''(x) > 0$, to $f'(x)$ rośnie. Oznacza to, że nachylenie oryginalnej funkcji $f(x)$ wraz ze wzrostem argumenty, staje się coraz bardziej stroma. W tym przypadku mówimy, że funkcja $f(x)$ jest **wypukła w górę** lub po prostu **wypukła**. Ilustruje to rysunek 1(a).
- Jeśli $f''(x) < 0$, to $f'(x)$ maleje. Oznacza to, że nachylenie oryginalnej funkcji $f(x)$ staje się coraz mniejsze wraz ze wzrostem wartości argumentu. Funkcja zakrzywia się w dół i mówimy, że jest **wypukła w dół** lub **wklęsła**. Ilustruje to rysunek 1(b).



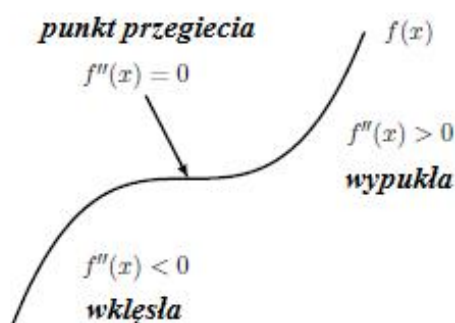
Rysunek 1: Funkcji na rysunku (a) jest wypukła, a jej pochodna wzrasta. Rysunek (b) ilustruje funkcję wklęsłą, a jej pochodna maleje.

1.2 Wklęsłość i punkty przegięcia.

Druga pochodna funkcji dostarcza informacji o krzywiznie wykresu funkcji, wypukłości lub wklęsłości funkcji.

- Na rysunku 1 (a), $f(x)$ jest wypukła, więc jego druga pochodna jest dodatnia.
- Na rysunku 1 (b), $f(x)$ jest wklęsła, więc druga pochodna jest ujemna.

Punkt przegięcia funkcji $f(x)$ to punkt x , w którym wklęsłość funkcji zmienia się. W tym punkcie znak drugiej pochodnej zmienia znak. Ilustruje to rysunek 2.



Rysunek 2: Punkt przegięcia to miejsce gdzie wklęsłość funkcji się zmienia.

Uwaga. Nie wystarczy pokazać, że $f''(x) = 0$, aby stwierdzić, że x jest punktem przegięcia.

Punkty przegięcia.

1. Jeśli funkcja $y = f(x)$ ma punkt przegięcia w x_0 , to $f''(x_0) = 0$.
2. Jeżeli funkcja $y = f(x)$ spełnia warunek $f''(x_0) = 0$ to aby stwierdzić, że x_0 jest punktem przegięcia musimy wykazać, że $f''(x)$ zmienia w punkcie x_0 znak.

Przykład 1. Rozważmy funkcje dwie funkcje (a) $f_1(x) = x^3$ i (b) $f_2(x) = x^4$. Pokaż, że dla obu funkcji druga pochodna jest równa zero w punkcie 0, ale tylko jedna z tych funkcji ma faktycznie punkt przegięcia gdy $x = 0$.

Rozwiązanie. Funkcje

$$(a) f_1(x) = x^3, \quad (b) f_2(x) = x^4.$$

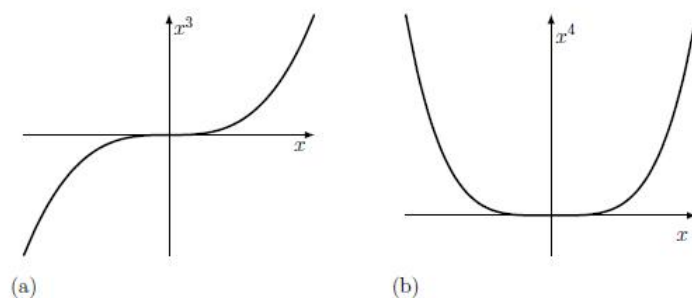
Pierwsze pochodne to

$$(a) f_1'(x) = 3x^2, \quad (b) f_2'(x) = 4x^3.$$

Drugą pochodną to:

$$(a) f_1''(x) = 6x, \quad (b) f_2''(x) = 12x^2.$$

Zatem dla $x = 0$ mamy $f_1''(x) = 0$, $f_2''(x) = 0$. Jednak $x = 0$, **NIE** jest punktem przegięcia funkcji $f_2(x) = x^4$. W rzeczywistości jest to minimum lokalne, jak pokazano na rysunku 3.



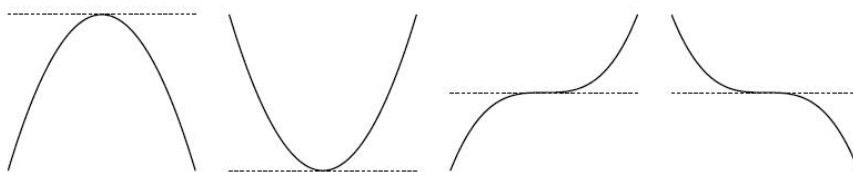
Rysunek 3: Funkcje (a) $f_1(x) = x^3$ i (b) $f_2(x) = x^4$ obie spełniają warunek $f_i'' = 0$, $i = 1, 2$. Jednak tylko $f(x)_1 = x^3$ ma punkt przegięcia dla $x = 0$, podczas gdy $f(x)_2 = x^4$ ma lokalne minimum w tym punkcie. To nie jest sprzeczność, ponieważ $f_2''(x)$ nie zmienia znaku w punkcie $x = 0$.

1.3 Punkt krytyczny

Zacniemu od definicji punktu krytycznego funkcji różniczkowalnej.

Definicja. Punkt krytyczny funkcji $f(x)$ to dowolny punkt x , z jej dziedziny, w którym pierwsza pochodna przyjmuje wartość zero, czyli $f'(x) = 0$.

Geometrycznie punkt krytyczny występuje zawsze, gdy nachylenie stycznej do wykresu funkcji wynosi zero, tj. styczna jest pozioma. Rysunek 4 pokazuje kilka możliwych kształtów wykresu funkcji w pobliżu punktu krytycznego.



Rysunek 4: Punkt krytyczny (miejsce, w którym $f'(x) = 0$) może być lokalnym maksimum, lokalnym minimum lub punktem przegięcia.

Na rysunku, od lewej do prawej są przedstawione, **lokalne maksimum**, **lokalne minimum** i dwa **punkty przegięcia**. Punkty krytyczne odgrywają ważną rolę podczas analizowania funkcji rzeczywistych. Dlatego podamy kryteria pozwalające wyznaczyć punkty krytyczne i podać ich charakter czyli ustalić, czy punkt krytyczny to lokalne maksimum, minimum lub punkt przegięcia.

Przykład 2. Rozważmy funkcję $y = f(x) = x^3 + 3x^2 + ax + 1$. Dla jakich wartości parametru a brak jest punktów krytycznych dla tej funkcji?

Rozwiązanie. Obliczamy pierwszą pochodną $f'(x) = 3x^2 + 6x + a$. Krytyczny punkt wystąpi zawsze, gdy $f'(x) = 0$, co w przypadku rozważanej funkcji implikuje równanie $3x^2 + 6x + a = 0$.

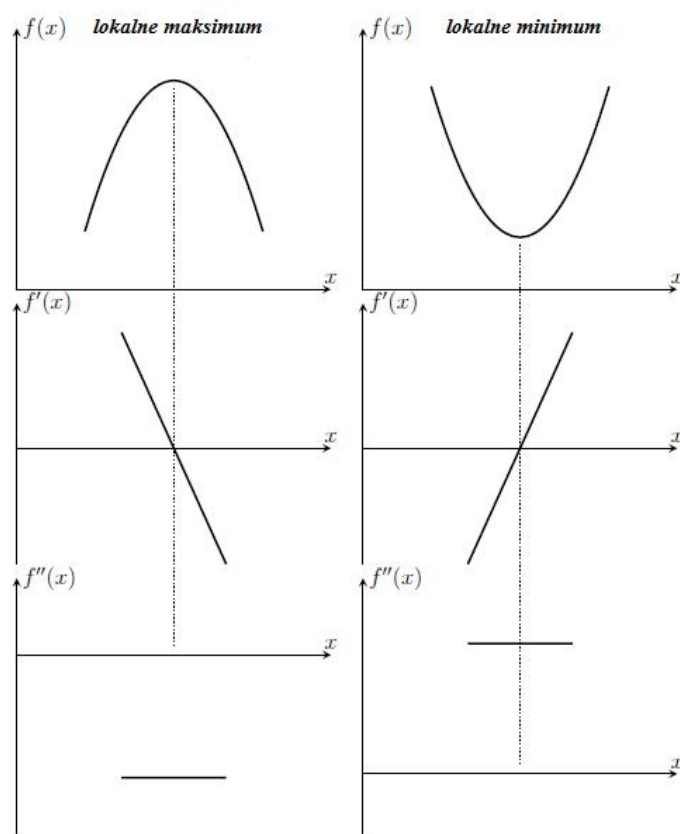
Rozwiązania tego równania kwadratowego są postaci

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4a3}}{6}.$$

Tak więc istnieją rzeczywiste rozwiązania, o ile jest spełniona nierówność $36 - 12a \geq 0$ (co odpowiada warunkowi $a \geq 3$).

1.4 Co się dzieje w pobliżu punktu krytycznego?

Na rysunku 5 porównujemy zachowanie dwóch funkcji, z których każda ma punktu krytycznego innego typu (wykresy w pierwszym wierszu). Porównujemy ich pierwszą i drugą pochodną w okolicach do tego punktu (odpowiednio wykresy w drugim i trzecim wierszu). W każdym przypadku, pierwsza pochodna $f'(x) = 0$ w punkcie krytycznym.



Rysunek 5: Blisko lokalnego maksimum, $f(x)$ jest wypukła, $f'(x)$ maleje, więc $f''(x)$ jest ujemne. Blisko lokalnego minimum, $f(x)$ jest wklęsła, $f'(x)$ rośnie, więc $f''(x)$ jest dodatnia.

W pobliżu lokalnego maksimum nachylenie wykresu funkcji $f(x)$ zmienia swoją wartość z dodatniej na ujemną przechodząc przez wartość zero w punkcie krytycznym. To znaczy, że $f'(x)$ jest funkcją malejącą, co pokazano na rysunku 5. Ponieważ zmiany pierwszej pochodnej są odzwierciedlone w jej pochodnej czyli w drugiej pochodnej funkcji $f(x)$, więc pochodna $f''(x)$, jest ujemna w punkcie lokalnego maksimum. Sytuacja przeciwna zachodzi w przypadku lokalnego minimum co ilustruje rysunek 5.

Poniżej zbieramy i podsumowujemy wnioski dotyczące pochodnych.

Podsumowanie: pierwsza pochodna.

$f'(x) < 0$	$f'(x_0) = 0$	$f'(x) > 0$
funkcja malejąca	punkt krytyczny x_0	funkcja rosnąca

- **Test pierwszej pochodnej:** Badamy zmianę znaku pierwszej pochodnej w pobliżu punktu krytycznego, x_0 . W pobliżu lokalnego maksimum obserwujemy zmianę znaku postaci:

1. dla $x < x_0$, mamy $f'(x) > 0$;
2. dla $x = x_0$, mamy $f'(x_0) = 0$;
3. dla $x > x_0$, mamy $f'(x) < 0$;

W pobliżu lokalnego minimum obserwujemy zmianę znaku postaci:

1. dla $x < x_0$, mamy $f'(x) < 0$;
2. dla $x = x_0$, mamy $f'(x_0) = 0$;
3. dla $x > x_0$, mamy $f'(x) > 0$;

Podsumowanie: druga pochodna.

$f''(x) < 0$	$f''(x_0) = 0$	$f''(x) > 0$
funkcja wklęsła	punkt krytyczny w x_0 tylko gdy f'' zmienia znak	funkcja wypukła

- **Test drugiej pochodnej:** Badamy znak drugiej pochodnej w punkcie krytycznym, x_0 (dla którego spełniony jest warunek $f'(x_0) = 0$).

1. Jeśli $f''(x_0) < 0$, to w punkcie x_0 jest lokalnym maksimum.
2. Jeśli $f''(x_0) = 0$, test jest niejednoznaczny co do max / min dla x_0 . Jeśli f'' również zmienia znak w x_0 , to x_0 jest punktem przegięcia.
3. Jeśli $f''(x_0) > 0$, to w punkcie x_0 jest lokalnym minimum.

1.5 Globalne maksima i minima.

Globalne maksimum funkcji określonej na pewnym przedziale to największa wartość, jaką funkcja osiąga dla punktów tego przedziału. Podobnie **globalne minimum** jest najmniejszą wartością jaką funkcja osiąga dla punktów tego przedziału.

Uwaga. W przypadku funkcji zdefiniowanej na przedziale zamkniętym aby wyznaczyć globalne maksimum lub globalne minimum, oprócz sprawdzenia wartości funkcji w punktach krytycznych musimy sprawdzić wartości funkcji na końcach przedziału.

Przykład 3. Rozważmy funkcję $y = f(x) = \frac{2}{x} + x^2$ na przedziale $0,1 \leq x \leq 4$. Znajdź absolutne maksimum i minimum.

Rozwiązanie. Najpierw obliczamy pochodne:

$$f'(x) = -2\frac{1}{x^2} + 2x, \quad f''(x) = 4\frac{1}{x^3} + 2.$$

Znajdujemy punkty krytyczne kładąc $f'(x) = 0$ i rozwiązując równanie

$$-2\frac{1}{x^2} + 2x, \implies -2\frac{1}{x^2} = -2x, \implies x^3 = 1,$$

co implikuje punkt krytyczny dla $x = 1$. Druga pochodna w tym punkcie to

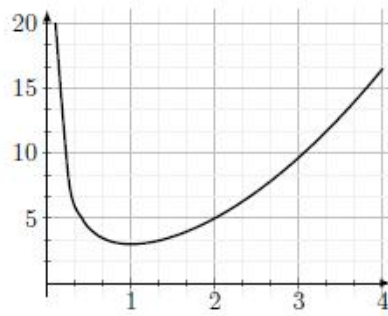
$$f''(1) = 6 > 0,$$

tak, więc w punkcie $x = 1$ funkcja ma lokalne minimum. Teraz obliczamy wartość funkcji na końcach przedziału $[0,1, 4]$ i w punkcie krytycznym $x = 1$, aby określić, gdzie jest globalne maksimum i globalne minimum funkcji.

$$f(0,1) = \frac{2}{0,1} + 0,1^2 = 20,01,$$

$$f(1) = \frac{2}{1} + 1^2 = 3,$$

$$f(4) = \frac{2}{4} + 4^2 = 16,5$$



Rysunek 6: Funkcja $f(x) = \frac{2}{x} + x^2$ na przedziale $[0,1,4]$ nie ma lokalnego maksimum.

W konsekwencji $x = 1$ to zarówno minimum lokalne, jak i minimum globalne na podanym przedziale. Nie ma lokalnych maksimów. Globalne maksimum funkcja osiąga w lewym punkcie końcowym, $x = 0,1$. Rysunek 6 przedstawia wykres funkcji $f(x) = \frac{2}{x} + x^2$, który ilustruje otrzymane w sposób analityczny wyniki.

1.6 Podsumowanie.

1. Możemy poprawić dokładność szkicu funkcji $f(x)$, badając jej pochodne. Na przykład, jeśli $f'(x) > 0$, to $f(x)$ rośnie, a jeśli $f'(x) < 0$, to $f(x)$ maleje. Ponadto, jeśli $f''(x) > 0$, to znaczy, że $f'(x)$ rosnące i funkcja $f(x)$ jest wypukła. Podobnie, jeśli $f''(x) < 0$ to $f(x)$ jest wklęsła.
2. Jeśli $f''(x_0) = 0$ **oraz** $f''(x)$ zmienia znak w punkcie x_0 , to x_0 jest punktem przegięcia funkcji $f(x)$: punkt, w którym zmienia się jego wklęsłość.
3. Jeśli $f'(x_0) = 0$, to x_0 jest punktem krytycznym funkcji $f(x)$. Punkt krytyczny wymaga dalszych testów, aby określić, czy jest to lokalne minimum maksymalna lub punkt przegięcia.
4. Mając wyznaczony punkt krytyczny x_0 (punkt dla którego $f'(x_0) = 0$), test pierwszej pochodnej sprawdza znak $f'(x)$ w pobliżu x_0 . Jeśli mamy do czynienia przy przechodzeniu przez punkt x_0 ze zmianą znaku wartości funkcji $f'(x)$ postaci $+$, 0 , $-$ to w punkcie x_0 funkcja $f(x)$ ma lokalne maksimum. Jeśli natomiast zmienia znaku ma postać $-$, 0 , $+$ to w punkcie x_0 funkcja $f(x)$ lokalne minimum.
5. Mając punkt krytyczny x_0 , test drugiej pochodnej sprawdza znak $f''(x_0)$. Jeśli $f''(x_0) < 0$ to w x_0 jest lokalne maksimum funkcji $f(x)$. Jeśli $f''(x_0) > 0$, to x_0 jest lokalnym minimum. Jeśli $f''(x_0) = 0$, to test drugiej pochodny nie daje rozstrzygnięcia.
6. Globalne maksimum i minimum można zidentyfikować tylko po porównaniu wartości funkcji we wszystkich krytycznych punktach i punktach końcowych przedziału na którym jest określona badana funkcja.

Krzysztof Topolski