

1 Wykład 8. (Optymalizacja).

Rachunek różniczkowy został opracowany w celu rozwiązywania praktycznych problemów. Na tym wykładzie skoncentrujemy się na problemach optymalizacyjnych, rozumianych jako znalezienie "największego", "najmniejszego", lub "najlepszego" w sensie zadanego kryterium rozwiązania postawionego problemu. Omówiona na wykładzie metoda wyznaczania optymalnego rozwiązania będzie opierać się o wprowadzony już wcześniej sposób wyznaczania za pomocą rachunku różniczkowego ekstremów funkcji różniczkowalnej. Tak więc nowym wyzwaniem na tym wykładzie będzie w zasadzie jedynie przełożenie zadania tekstowego na problem matematyczny. Zaczynamy od elementarnych przykładów aby pod koniec wykładu omówić bardziej złożone sytuacje o znaczeniu biologicznym. Jako pierwszy przykład zagadnienia optymalizacyjnego rozpatrzmy pewien model rozwoju populacji.

1.1 Zależny od liczebności wzrost populacji.

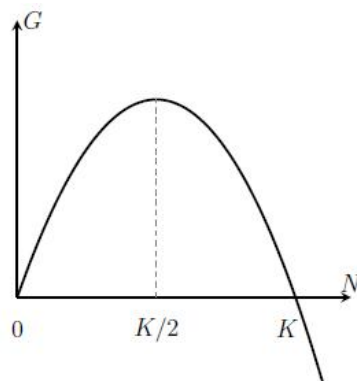
Biolodzy często zauważają, że tempo wzrostu populacji zależy nie tylko na wielkość populacji, ale także na jej zagęszczenie. Na dłuższą metę wzrost ze stałą intensywnością nie jest możliwy. W sytuacji gdy osobniki populacji muszą konkurować o zasoby środowiska, pożywienie, terytorium lub partnerów, zwykle nie mogą inwestować całego swojego czasu ani energii w rozmnażanie, co nieuchronnie prowadzi do spadku tempa wzrostu populacji. Realistyczny model rozwoju populacji powinien uwzględnić zależność tempa wzrostu populacji od jej liczebności czy zagęszczenia. Jednym z typowych przykładów wzrostu zależnego od gęstości jest model rozwoju logistycznego. W modelu tym zakłada się, że tempo wzrostu populacji, G zależy od wielkości populacji, N , w następujący sposób:

$$G(N) = rN \left(\frac{K - N}{K} \right).$$

Tutaj N jest **zmienną niezależną**, a $G(N)$ jest funkcją opisującą tempo wzrostu w sytuacji gdy populacja ma wielkość N . Wszystkie inne wielkości są parametrami modelu, ustalonymi stałymi:

- $r > 0$ jest stałą, zwaną współczynnikiem wzrostu,
- $K > 0$ jest stałą, zwaną pojemnością środowiska reprezentującą maksymalną wielkość populacji, jaką dane środowisko może utrzymać.

Tak więc różniczkując funkcję $G(N)$, traktujemy r i K jako stałe. Rysunek 1 przedstawia wykres funkcji $G(N)$.



Rysunek 1: Model logistycznego wzrostu liczebności populacji, w którym tempo wzrostu G zależy od wielkość populacji N .

Przykład 1. (Tempo wzrostu logistycznego). *Odpowiedz na następujące pytania:*

- (a) Wyznacz wielkość populacji N , przy którym populacja wzrasta w maksymalnym tempie.
- (b) Podaj wartość maksymalnego wzrostu w kategoriach parametrów modelu, r i K .
- (c) Dla jakiej wielkości populacji tempo wzrostu wynosi zero?

Rozwiązanie. Możemy funkcję $G(N)$ przedstawić w formie:

$$rN \left(\frac{K - N}{K} \right) = rN - \frac{r}{K}N^2,$$

z której wynika, że $G(N)$ jest wielomianem o potęgach zmiennej N , ze współczynnikami r i r/K .

- (a) Aby znaleźć punkty krytyczne funkcji $G(N)$, znajdujemy N takie, że $G'(N) = 0$, a następnie skorzystamy z testu na maksimum:

$$G'(N) = r - 2\frac{r}{K}N = 0, \implies r = 2\frac{r}{K}N, \implies N = \frac{K}{2}.$$

Stąd $N = K/2$ jest punktem krytycznym, ale czy jest to maksimum? Możemy to sprawdzić na kilka sposobów. Po pierwsze, rysunek 1 pokazuje parabolę skierowaną ramionami do dołu. Możemy więc na jego podstawie stwierdzić, że to lokalne maksimum. Alternatywnie możemy zastosować, test drugiej pochodnej:

$$G''(N) = -2\frac{r}{K} < 0, \implies \text{więc } G(N) \text{ jest wklęsła}$$

Tak więc dla $N = \frac{K}{2}$, funkcja ma lokalne maksimum. Zatem wielkość populacji dla której tempo wzrostu jest największe to $K/2$ czyli połowa pojemności środowiska.

- (b) Maksymalną szybkość wzrostu wyznaczymy, obliczając wartość funkcji G w punkcie $N = K/2$,

$$G\left(\frac{K}{2}\right) = r\left(\frac{K}{2}\right)\left(\frac{K - \frac{K}{2}}{K}\right) = r\frac{K}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{rK}{4}.$$

- (c) Aby znaleźć wielkość populacji, przy której tempo wzrostu wynosi zero, podstawiamy $G(N) = 0$ i rozwiązujemy równanie ze względu na N :

$$G(N) = rN \left(\frac{K - N}{K} \right) = 0.$$

Istnieją dwa rozwiązania. Jedno jest trywialne: $N = 0$ (jest ono biologicznie interesujące w tym sensie, że wyklucza starożytną ideę **spontanizacji**, błędną hipotezę głoszącą, że życie może powstać samoistnie, z kurzu lub powietrza. Jeśli $N = 0$, tempo wzrostu również wynosi 0. Drugie rozwiązanie, $N = K$ oznacza, że populacja osiągnęła wielkość równą "pojemności środowiska".

1.2 Wielkość komórki zapewniająca maksymalne tempo akumulacji składników odżywczych.

Zgodnie z modelem opisanym na jednym z poprzednich wykładów przyjęliśmy, że tempo wchłaniania i konsumpcji składników odżywczych kulistej komórki $A(r)$, $C(r)$ jest opisane przez:

$$A(r) = k_1 S = 4k_1 \pi r^2, \quad C(r) = k_2 V = \frac{4}{3} \pi k_2 r^3,$$

gdzie $k_1, k_2 > 0$ są stałymi.

Tempo **wzrostu netto** składników odżywczych, które jest różnicą tych dwóch wielkości, wynosi:

$$N(r) = A(r) - C(r) = 4k_1\pi r^2 - \frac{4}{3}\pi k_2 r^3.$$

Ta wielkość jest funkcją promienia r komórki.

Przykład 2. Określ promień komórki, dla której tempo wzrostu netto składników pokarmowych $N(r)$ jest największe.

Rozwiązanie. Chcemy wyznaczyć maksimum funkcji $N(r)$. Najpierw znajdujemy punkty krytyczne $N(r)$, pamiętając, że $8k_1\pi$ i $4k_2\pi$ są stałymi. Punkty krytyczne występują, gdy $N'(r) = 0$.

$$N'(r) = 8k_1\pi r - 4k_2\pi r^2 = 0 \implies 4\pi r(2k_1 - k_2 r) = 0.$$

Stąd $r = 0$ lub $r = 2\frac{k_1}{k_2}$. W celu określenia typ punktu krytycznego, użyjemy testu drugiej pochodnej

$$N''(r) = 8k_1\pi - 8k_2\pi r = 8\pi(k_1 - k_2 r).$$

Podstawiając $r = 2k_1/k_2$, otrzymamy

$$N''\left(2\frac{k_1}{k_2}\right) = 8\pi\left(k_1 - k_2\frac{2k_1}{k_2}\right) = -8\pi k_1 < 0.$$

Zatem druga pochodna jest ujemna gdy $r = 2k_1/k_2$, weryfikując, że jest to lokalne maksimum. Stąd szybkość netto wchłaniania składników odżywczych przez komórkę jest najwyższa gdy jej promień jest równy $r = 2k_1/k_2$.

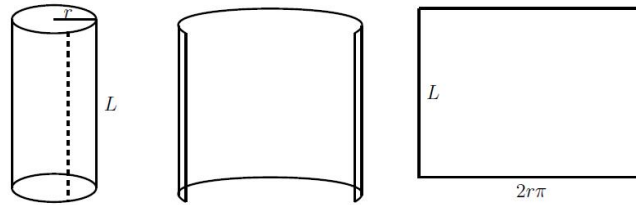
1.3 Optymalizacja z ograniczeniem.

W następnych przykładach identyfikacja funkcji do optymalizacji wymaga pewnego namysłu. Rozważmy również sytuacje przy opisie których, będziemy używać więcej niż jednej zmiennej niezależnej jednak występujące ograniczenia pozwolą nam wyeliminować z opisu modelu niektóre z nich.

1.3.1 Cylindryczna komórka o minimalnej powierzchni.

Nie wszystkie komórki są kuliste. Niektóre są cylindryczne. Postaramy się sprawdzić, w jaki sposób wymóg minimalizacji powierzchni wpływa na ogólny kształt cylindrycznej komórki o okrągłym przekroju. Zakładamy, że objętość komórki jest stała, ponieważ w zasadzie cytoplazmy w jego wnętrza nie można znacząco "skompresować". Założmy jednak, że komórka ma błonę komórkową, która może się rozszerzać i która ma tendencję do zajmowania najmniejszej możliwej powierzchni. W języku fizycznym energia sprężysta zmagazynowana w błonie ma tendencję do minimalizacji swej wartości. Chcemy znaleźć proporcje cylindra (czyli stosunek długość do promienia), tak aby komórka o ustalonej objętości miała minimalną powierzchnię. Przypomnij następujące własności cylindra o długości L i promieniu r :

- Objętość cylindra jest iloczynem jego powierzchni podstawy A i wysokości, L . To znaczy $V = AL$. W przypadku walca o przekroju kołowym $V = \pi r^2 L$.
- Jak pokazano na rysunku 2, cylinder po "przecięciu i rozwinięciu" ma postać prostokąta o bokach L i $2\pi r$, gdzie r jest promieniem kołowego przekroju poprzecznego. Pole powierzchni bocznej jest równe iloczynowi długości boków, $S_b = 2\pi r L$. Jeśli "końce" cylindra są dwoma kołami, to suma obszarów tych dwóch końców to $S_k = 2\pi r^2$. W przypadku rzeczywistej komórki te końce nie są płaskimi kołowymi obszarami, my jednak dla uproszczenia zakładamy płaskie, okrągłe końce.



Rysunek 2: Cylinder.

- Całkowita powierzchnia cylindra z płaskimi końcami wynosi wtedy

$$S = 2\pi rL + 2\pi r^2.$$

W języku matematyki rozważany problem można przedstawić w następujący sposób.

Przykład 3. Przy założeniu, że objętość jest równa $V = K$, zminimalizuj podaną powierzchnię $S = 2\pi rL + 2\pi r^2$ komórki.

Rozwiązanie. Kształt cylindra zależy zarówno od długości L jak i od promienia r cylindra. Jednak przy założeniu ustalonej objętości cylindra, te wielkości nie są niezależne. Mamy więc do czynienia z przykładem problemu optymalizacji z ograniczeniem, tj. warunkiem, który musi być spełniony przez rozwiązanie problemu optymalizacyjnego. Ograniczeniem jest "ustalona objętość cylindra",

$$V = \pi r^2 L = K,$$

gdzie $K > 0$ jest ustaloną stałą. To ograniczenie pozwala nam wyeliminować jedną zmienną. Na przykład, L , możemy wyrazić w terminach r

$$L = \frac{K}{\pi r^2}.$$

Podstawiając taką postać L do wzory opisującego S otrzymamy

$$S = 2\pi rL + 2\pi r^2, \implies S(r) = 2\pi r \frac{K}{\pi r^2} + 2\pi r^2, \quad S(r) = 2\frac{K}{r} + 2\pi r^2,$$

tak więc teraz S jest już funkcją pojedynczej zmiennej niezależnej, r i stałych K i π .

Teraz możemy sformułować problem optymalizacyjny: znajdź minimum funkcji $S(r)$.

Obliczamy pochodne, aby znaleźć i sklasyfikować punkty krytyczne:

$$S'(r) = -2\frac{K}{r^2} + 4\pi r, \quad S''(r) = 4\frac{K}{r^3} + 4\pi.$$

Ponieważ $K, r > 0$, więc druga pochodna funkcji $S(r)$ jest zawsze dodatnia co implikuje wypukłość funkcji $S(r)$ jest. Zatem każdy wyznaczony punkt krytyczny jest zatem automatycznie minimum lokalnym. Rozwiązując równanie $S'(r) = 0$, mające postać:

$$S'(r) = -2\frac{K}{r^2} + 4\pi r = 0,$$

otrzymujemy

$$r = \left(\frac{K}{2\pi}\right)^{1/3}.$$

Zatem długość komórki jest równa

$$L = \left(\frac{4K}{\pi}\right)^{1/3}.$$

Teraz mając wartości promienia r i długości L cylindra o minimalnej powierzchni możemy scharakteryzować kształt jego kształt. Możemy na przykład określić stosunek promienia do długości, który po uwzględnieniu postaci r i L jest równy:

$$\frac{L}{r} = 2.$$

Oznacza to, że $L = 2r$, a więc długość cylindra jest równa średnicy jego podstawy. Oznacza to, że "cylindryczna komórka" z elastyczną błoną komórkową byłaby prawie jak kula o promieniu r , która została spłaszczona.

1.3.2 Optymalne żerowanie.

Zwierzęta spędzają dużo czasu na żerowaniu - poszukiwaniu pożywienia. Czas żerowania jest ograniczony, ponieważ po zachodzie słońca ryzyko stania się "pokarmem" znacząco wzrasta, a prawdopodobieństwo znalezienia pożywienia maleje. Osobniki, które najsprawniej odnajdują pożywienie w tym ograniczonym czasie, mają największe szanse na przeżycie. Biolodzy są przekonani, że ewolucja optymalizuje zachowania zwierząt, preferując te, które są lepiej dostosowane a więc szybsze, silniejsze lub bardziej sprawne. W rozważanej tu sytuacji te, które w najbardziej skuteczny sposób znajdują pożywienia. Postępując zgodnie z podstawowymi zasadami, omówionymi na przykład w monografii autorstwa Stephensa i Krebsa¹ przeanalizujemy model optymalnego żerowania.



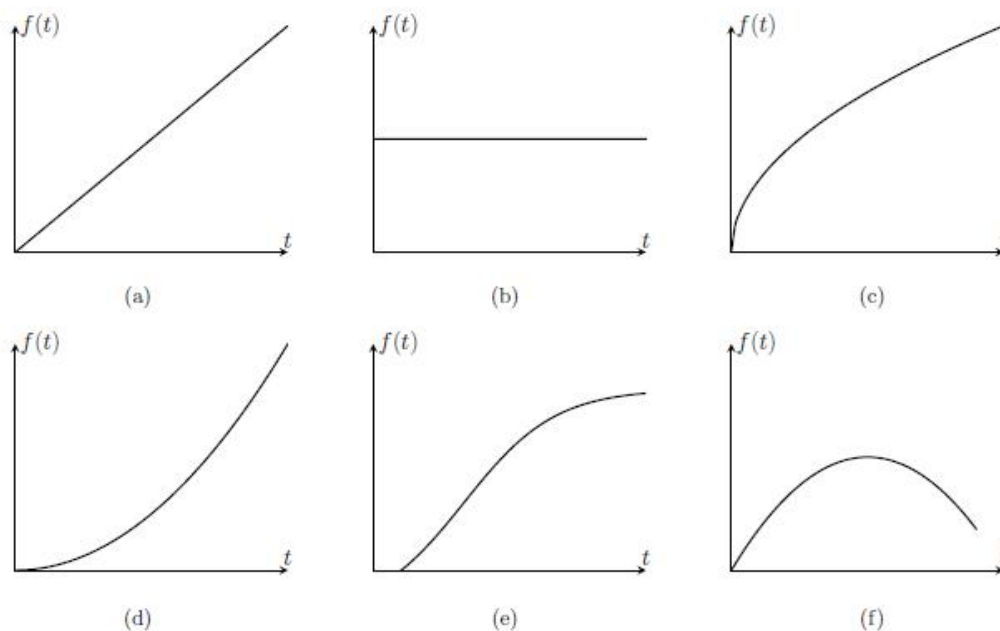
Rysunek 3: Ptak podróżuje codziennie, aby żerować. Chcemy określić, jak długo powinien pozostać na żerowisku, aby zoptymalizować swój ogólny średni zysk energii na jednostkę czasu.

Oznaczenia.

- τ = czas podróży między gniazdem a żerowiskiem (zakładamy, że jest to czas nieuchronnie marnowany).
- t = czas przebywania na żerowisku (zwany także czasem żerowania),
- $f(t)$ = całkowita energia uzyskana podczas żerowania na żerowisku przez czas t .

Zysk energetyczny z żerowania. W niektórych miejscach pożywienie występuje w dużej obfitości i można je szybko znaleźć, podczas gdy w innych zdobycie go wymaga czasu i wysiłku. Typowy czas potrzebny do znalezienia pożywienia może być odzwierciedlony przez różne funkcje $f(t)$ opisujące ilość uzyskanej energii w trakcie żerowania przez czas t na żerowisku. Rysunek 4 pokazuje typowe wykresy funkcji f .

¹Stephens, D. W., and J. R. Krebs, *Foraging Theory*, Princeton University Press, Princeton. 1986.



Rysunek 4: Przykłady różnych kształtów funkcji opisujących całkowity zysk energetyczny dla danego czasu żerowania t . Kształty tych funkcji określają, w jak skutecznie przebiega żerowanie na danym żerowisku. .

Przykład 4. (Zysk energetyczny a czas przebywania na żerowisku). Dla każdego rodzaju funkcji $f(x)$ wyjaśnij, co mówi kształt wykres funkcji $f(t)$, opisującej całkowity przyrost energii podczas żerowania: jak łatwo lub trudno jest znaleźć jedzenie?

Rozwiązanie. Przedstawione rodzaje żerowisk można opisać w następujący sposób:

1. Zysk energii jest liniowo proporcjonalny do czasu spędzonego na żerowisku. W tym przypadku, żerowisko ma tak dużo pożywienia, że nigdy się nie wyczerpuje. Tak więc warto pozostać na takim żerowisku łątkę jak najdłużej.
2. Zysk energii jest niezależny od spędzonego czasu. Zwierzę otrzymuje pełną ilość gdy tylko dotrze do żerowiska.
3. Pożywienie stopniowo się wyczerpuje (całkowity przyrost energii spada do pewnego ustalonego poziomu wraz ze wzrostem t). Mamy w tym przypadku "malejący zysk" za dłuższy pobyt. Sugeruje to, że najlepiej nie zostawać zbyt długo na żerowisku.
4. Zwiększa się nagroda za dłuższe pozostanie na tym żerowisku: zysk energii netto jest opisany przez funkcję wypukłą ($f''(t) > 0$), więc jej nachylenie rośnie.
5. Nabieranie energii wymaga czasu. Po pewnym zysk wzrasta, ale ostatecznie żerowisko się wyczerpuje.
6. Zbyt długie przebywanie w takim miejscu jest niekorzystne, powodując utratę netto energii. Ważne jest, aby opuścić to żerowisko odpowiednio wcześnie, aby uniknąć tej straty.

Przykład 5. Rozważmy hipotetyczną funkcję energii opisującą żerowisko

$$f(t) = \frac{E_{max}t}{k+t},$$

gdzie E_{max} , $k > 0$, są stałymi.

- (a) Dopasuj tę funkcję do jednego z typów funkcji z rysunku 4.
(b) Zinterpretuj znaczenie stałych E_{max} , k .

Rozwiązanie.

- (a) Funkcja przypomina kształtem kinetykę Michaelisa-Menten. Tak więc opis (3) jest najbliższym dopasowaniem.
(b) E_{max} jest asymptotą poziomą, odpowiadającą górnej granicy całkowitej ilości energii, jaką można uzyskać z żerowiska. Parametr k ma wymiar czasu i steruje "stromością" wykresu funkcji. Żerowanie przez czas $t = k$, prowadzi do uzyskania przez osobnika żerującego połowy całkowitej dostępnej energii, ponieważ $f(k) = E_{max}/2$.

Przykład 6. (Optymalizacja). Możemy założyć, że żerujący osobnik próbuje zmaksymalizować średni zysk energii w jednostce czasu, zdefiniowany przez stosunek:

$$R(t) = \frac{\text{Całkowita uzyskana energia}}{\text{Całkowity spędzony czas}}.$$

Zapisz $R(t)$ dla założonej funkcji energetycznej żerowiska postaci

$$f(t) = \frac{E_{max}t}{(k+t)},$$

Rozwiązanie. "Całkowity czas spędzony" to suma ustalonej ilości czasu τ spędzonego na podróży na żerowisko i czas t żerowania. "Całkowita uzyskana energia" to $f(t)$. Zatem dla funkcji żerowiska $f(t)$ z przykładu

$$R(t) = \frac{f(t)}{(\tau+t)} = \frac{E_{max}t}{(k+t)(\tau+t)}.$$

Możemy teraz sformułować problem matematyczny:

Znajdź czas t , który maksymalizuje $R(t)$.

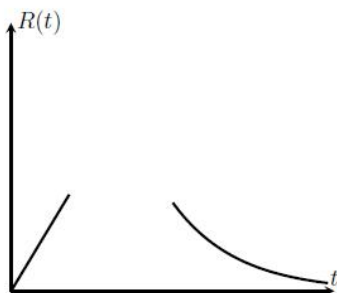
Znajdując takie t , określimy **optymalny czas przebywania na żerowisku**.

Przykład 7. Użyj rachunku różniczkowego, aby znaleźć i sklasyfikować punkty krytyczne funkcji $R(t)$.

Rozwiązanie. Najpierw naszkicujemy wykres funkcji $R(t)$, ze względu na interpretację t jako czasu przebywania na żerowisku, jedynie dla $t > 0$.

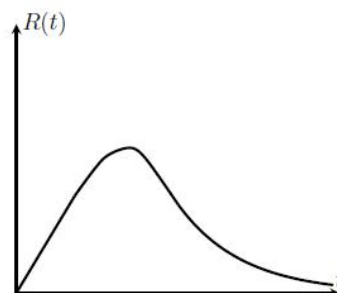
- Dla $t \approx 0$ mamy $R(t) \approx (E_{max}/k\tau)t$, więc w pobliżu zera $R(t)$ rośnie liniowo.

- Ponieważ, gdy $t \rightarrow \infty$, $R(t) \rightarrow E_{max}t/t^2 \rightarrow 0$, więc funkcja $R(t)$ ostatecznie maleje do zera. Możemy to zilustrować następującym rysunkiem.



Rysunek 5:

- Ponieważ funkcja $R(t)$ jest ciągła dla $t > 0$, więc wykres funkcji $R(t)$ ma kształt przedstawiony na rysunku 6.



Rysunek 6:

- Formalnie aby znaleźć lokalne maksimum, najpierw za pomocą reguły ilorazu obliczamy pochodną $R'(t)$, a następnie przyrównujemy ją do zera

$$R'(t) = E_{max} \frac{k\tau - t^2}{(k+t)^2(\tau+t)^2} = 0.$$

Stąd otrzymujemy, że

$$k\tau - t^2 = 0, \quad \text{co implikuje } t_{1,2} = \pm\sqrt{k\tau}.$$

Odrzucając ujemne rozwiązanie, wnioskujemy, że punkt krytyczny funkcji $R(t)$ to

$$t_{kry} = \sqrt{k\tau}.$$

- Funkcja $R(t)$ jest funkcją wymierną, więc jej druga pochodna jest skomplikowana, więc aby sprawdzić czy mamy do czynienia z minimum czy też z maksimum skorzystamy z test pierwszej pochodnej, czyli sprawdzimy znak $R'(t)$ po obu stronach punktu krytycznego.

- Analizujemy teraz postać pochodnej funkcji $R(t)$,

$$R'(t) = E_{max} \frac{k\tau - t^2}{(k+t)^2(\tau+t)^2}.$$

Ponieważ mianownik tego ułamka jest dodatni, więc znak $R'(t)$ jest określony przez jego licznik, $(k\tau - t^2)$.

- Zatem $R'(t) > 0$ dla $t < t_{kry}$ i $R'(t) < 0$ dla $t > t_{kry}$.

Potwierdza to, że funkcja rośnie do punktu krytycznego i następnie maleje tak więc punkt krytyczny jest lokalnym maksimum. Więc aby zoptymalizować średnią szybkość przyrostu energii, $R(t)$, powinniśmy pozostać na żerowisku przez czas $t_{max} = \sqrt{k\tau}$.

Przykład 8. Wyznacz średnią szybkość przyrostu energii przy tym optymalnym czasie przebywania na żerowisku, tj. znajdź maksymalną średnią szybkość przyrostu energii.

Rozwiązanie. Obliczając wartość $R(t)$ dla $t = t_{max} = \sqrt{k\tau}$, otrzymujemy

$$R(t_{max}) = \frac{E_{max} t_{max}}{(k + t_{max})(\tau + t_{max})} = \frac{E_{max}}{\tau} \frac{1}{(1 + \sqrt{k/\tau})^2}.$$

Przykład ten można rozważając na bardziej rozbudowane modele żerowania co pozwala przeanalizować bardziej realistyczne modele ekologiczne.

Krzysztof Topolski