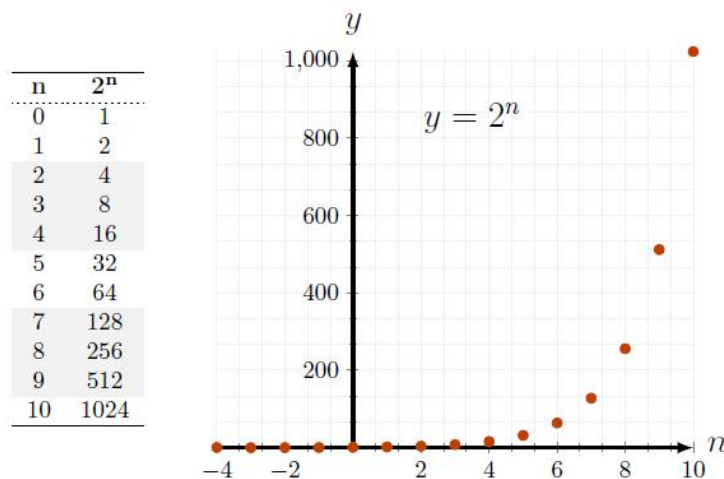


1 Wykład 9. (Funkcja wykładnicza).

Pojedyncza *Pałeczka okrężnicy* czyli pojedyncza bakteria *Escherichia coli* w sprzyjających warunkach dzieli się średnio co dwadzieścia minut. Na pierwszy rzut oka nie budzi to w nas szczególnego niepokoju. Jednak już po chwili namysłu gdy uświadomimy sobie fakt, iż jedna bakteria staje dwoma, które po chwili stają się czterema, następnie ośmioma i tak dalej. W ten sposób w ciągu jednego dnia z jednej bakterii *Escherichia coli* może powstać superkolonia o wielkości i masie równej całej planecie Ziemia.

Dzieje się tak ponieważ hipotetyczny rozwój populacji bakterii *Escherichia coli* przebiega w sposób wykładniczy, czyli jest opisany przez funkcję $f(x) = 2^x$, która to funkcja rośnie w sposób wykładniczy, a więc "bardzo szybko". Przeanalizujemy funkcję wykładniczą z punktu widzenia rachunku różniczkowego. Zanim to jednak, zrobimy wróćmy do przykładu rozwoju bakterii *Escherichia coli*.



Rysunek 1:

Przykład 1. (Wzrost populacji bakterii). Użyj następujących faktów, aby sprawdzić stwierdzenie poczynione na początku wykładu.

- Masa jednej bakterii *E. coli* to $10^{-12} [g] = 10^{-15} [kg]$.
- Masa Ziemi to około $6 \times 10^{24} [kg]$.

Rozwiązanie. Opierając się na powyższych dwóch faktach, policzmy jaki powinien być rozmiar kolonii *E. coli*, czyli liczba bakterii m , które razem mają masę równą masie Ziemi

$$m = \frac{6 \times 10^{24} \text{ kg}}{10^{-15} \text{ kg}} = 6 \times 10^{39}.$$

Każda godzina odpowiada trzem pokoleniom. W okresie 24 godzin, będziemy mieć $24 \times 3 = 72$ pokoleń, z których każde podwaja wielkość kolonii. Po 1 dniu niekontrolowanego wzrostu liczba bakterii będzie więc równa 2^{72} . Możemy korzystając z faktu, że $2^{10} \approx 10^3$ dokonać oszacowania:

$$2^{72} = 2^2 \times 2^{70} = 4 \times (2^{10})^7 \approx 4 \times (10^3)^7 = 4 \times 10^{21}.$$

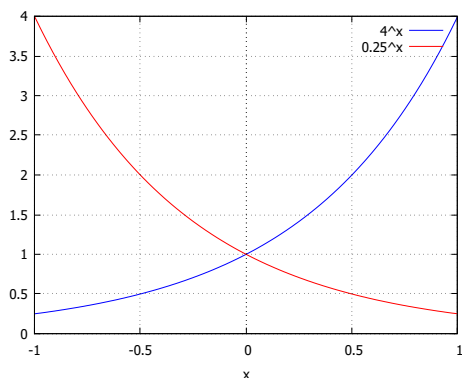
Używając kalkulatora naukowego, możemy wyznaczyć że wartość 2^{72} wynosi $4,7 \times 10^{21}$, czyli przybliżenie jest stosunkowo dobre. Wcześniejsze oszacowanie dokonane na początku wykładu nie jest więc całkiem dokładne. Jednak przeprowadzone obliczenia wskazują, że osiągnięcie przez rozwijającą się kolonię dostatecznie dużej liczby bakterii, tak aby ich masa przekroczyła masę Ziemi zajmuje mniej niż 2 dni.

1.1 Obliczanie pochodnej funkcji $f(x) = a^x$.

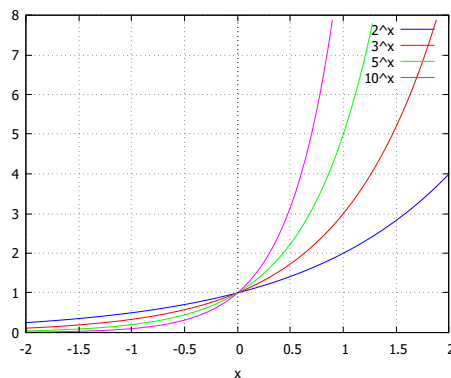
Zajmiemy się teraz wyznaczeniem pochodnej funkcji wykładniczej co pozwoli nam określić szybkość jej wzrostu. Zamiast skupiać się na szczególnym przypadku $f(x) = 2^x$, rozważamy funkcje wykładniczą z dowolną dodatnią wartością podstawy a . Zauważ, że podstawa musi być dodatnia aby funkcja wykładnicza mogła być zdefiniowana dla wszystkich rzeczywistych wartości x . Dla $a > 0$, rozważamy więc funkcję postaci

$$f(x) = a^x.$$

Wykresy funkcji wykładniczych przy różnych podstawach są przedstawione na rysunkach 2 i 3. W celu wyznaczenia pochodnej funkcji wykładniczej $f(x) = a^x$ skorzystamy z definicji pochodnej



Rysunek 2: Wykresy funkcji wykładniczych, krzywa czerwona odpowiada wykresowi funkcji $(\frac{1}{4})^x$ natomiast krzywa niebieska wykresowi funkcji 4^x .



Rysunek 3: Wykresy funkcji wykładniczych przy różnych podstawach.

$$\begin{aligned} \frac{da^x}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^x a^h - a^x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^x (a^h - 1)}{h} \\ &= a^x \left[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} \right]. \end{aligned}$$

Zmienna x pojawia się tylko we wspólnym czynniku a^x . Granica dotyczy h , a nie x . Wyrażenia w nawiasie kwadratowych zależą tylko od podstawy a oraz h , ale po wyznaczeniu granicy ten składnik jest pewną stałą (niezależną od x), które oznaczamy przez C_a .

Podsumowując, stwierdzamy, że pochodna funkcji wykładniczej $f(x) = a^x$ ma postać

$$f'(x) = C_a a^x,$$

gdzie C_a jest stałą zależną tylko od podstawy a .

Przedstawmy to bardziej szczegółowo na przykładzie funkcji wykładniczych o podstawie 2 oraz 10.

Przykład 2. (Pochodna funkcji 2^x). *Zapisz pochodną funkcji $f(x) = 2^x$.*

Rozwiązanie. Dla podstawy $a = 2$ mamy

$$[2^x]' = C_2 2^x,$$

gdzie

$$C_2 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2^h - 1}{h} \approx \frac{2^h - 1}{h} \quad \text{dla małych wartości } h.$$

Przykład 3. (Wartość C_2). *Znajdź przybliżoną wartość stałej C_2 , z przykładu 2.*

Rozwiązanie. Przybliżenie wartości C_2 możemy otrzymać obliczając wartość ułamka $\frac{2^h - 1}{h}$ dla małych, niezerowych wartości h , np. $h = 0,1, 0,01$, itd. Wyniki przedstawione są w tabeli 1.

Tablica 1. Przybliżenie wartości stałej C_2 .

h	C_2
0.1	0.717735
0.01	0.695555
0.001	0.693387
0.0001	0.693171
0.00001	0.693150
0.000001	0.693147
0.0000001	0.693147

Na podstawie tych wyników możemy przypuszczać, że $C_2 \approx 0,6931$. Prawdziwa wartość jest liczbą niewymierną, a więc ma nieskończenie długie rozwinięcie dziesiętne, które tutaj prezentujemy przez kilka pierwszych cyfr. Zatem pochodna funkcji $f(x) = 2^x$ to

$$[2^x]' = C_2 2^x \approx 0,6931 \cdot 2^x.$$

Przykład 4. (Podstawa 10 i pochodna 10^x). *Wyznacz pochodną funkcji $f(x) = 10^x$.*

Rozwiązanie. Dla podstawy 10 mamy

$$C_{10} \approx \frac{10^h - 1}{h} \quad \text{dla małych wartości } h.$$

Przybliżenie możemy wyznaczyć na podstawie wyników z tabeli 2 i stwierdzamy, że $C_{10} \approx 2,3026$.

Tablica 2. Przybliżenie wartości stałej C_{10} .

h	C_{10}
0.1	2.589254
0.01	2.329299
0.001	2.305238
0.0001	2.302850
0.00001	2.302612
0.000001	2.302588
0.0000001	2.302585

Tak więc

$$[10^x]' = C_{10} \cdot 10^x \approx 2,3026 \cdot 10^x.$$

Zatem pochodna funkcji $f(x) = a^x$ jest proporcjonalna do siebie samej, $f'(x) = (C_a) a^x$, ale stała proporcjonalności (C_a) zależy od podstawy a .

1.2 Naturalna podstawa e .

Na podstawie przykładów stwierdzamy, że pochodną funkcji $f(x) = a^x$ jest funkcja $f'(x) = C_a a^x$, gdzie stała C_a zależy od podstawy. Nasuwa się więc następujące pytanie. Czy istnieje podstawa funkcji wykładniczej, oznaczmy ją przez e , dla której stała w pochodnej jest szczególnie prosta, a mianowicie $C_e = 1$? Taką hipotetyczną podstawę możemy wyznaczyć korzystając jedynie z faktu, że

$$C_e = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

Oznacza to, że dla małych wartości h

$$e^h - 1 \approx h, \quad \implies \quad e^h \approx h + 1 \implies \quad e \approx (1 + h)^{1/h}.$$

Bardziej formalnie,

$$e = \lim_{h \rightarrow 0} (1 + h)^{\frac{1}{h}}.$$

Podstawą naturalnej funkcji wykładniczej jest liczba rzeczywista zdefiniowana jako:

$$e = \lim_{h \rightarrow 0} (1 + h)^{\frac{1}{h}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Możemy znaleźć przybliżoną wartość e , obliczając wartość wyrażenia $(1 + h)^{\frac{1}{h}}$, dla bardzo małej ale skończonej wartości h .

Tablica 3. Przybliżenie wartości e

h	przybliżenie e
0.1	2.5937425
0.01	2.7048138
0.001	2.7169239
0.0001	2.7181459
0.00001	2.7182682

Wyniki przedstawiono w tabeli 3 pozwalają stwierdzić, że dla $h = 0,00001$

$$e \approx (1,00001)^{100000} \approx 2,71826.$$

Podsumowując, stwierdzamy, że w przypadku specjalnej podstawy e mamy następującą własność:

Pochodną funkcji $f(x) = e^x$ jest funkcja

$$f'(x) = e^x.$$

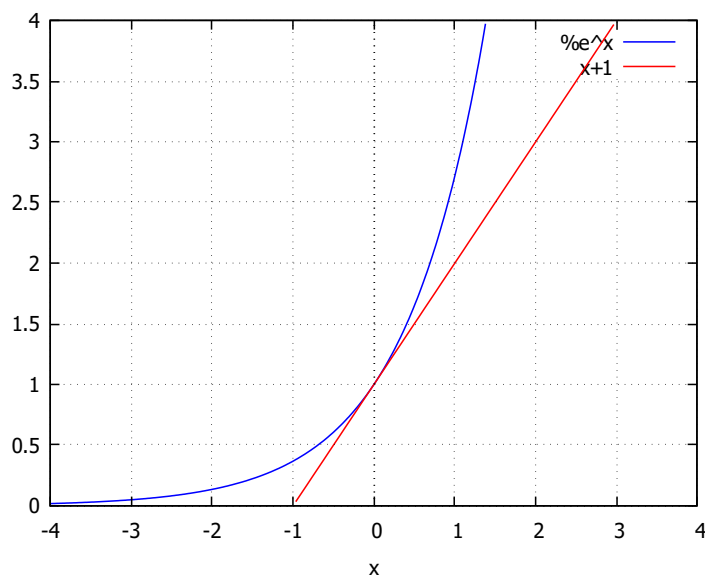
1.3 Własności funkcji $f(x) = e^x$.

Poniżej wymieniamy niektóre z kluczowych własności funkcji $f(x) \equiv \exp(x) = e^x$.

1. $e^a e^b = e^{a+b}$.
2. $(e^a)^b = e^{ab}$.
3. Dla wszystkich wartości x , $e^x > 0$.
4. $e^0 = 1$, $e^1 = e$
5. funkcja e^x jest funkcją ciągłą i różniczkowalną dla wszystkich liczb rzeczywistych x .
6. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.
7. $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$.
8. Pochodną funkcji $\exp(x)$ jest funkcja $[\exp(x)]' = \exp(x)$.

Przykład 5. Wyznacz pochodną funkcji $\exp(x)$ w punkcie $x = 0$ i pokaż, że prosta styczna w tym punkcie do wykresu funkcji e^x jest prosta o równaniu $y = x + 1$.

Rozwiązanie. Pochodną funkcji e^x jest funkcja e^x , tak więc ponieważ $\exp(0) = 1$ więc $\exp'(0) = 1$. Nachylenie stycznej w punkcie $x = 0$ wynosi zatem 1. Styczna przebiega przez punkt o współrzędnych $(0, e^0) = (0, 1)$, więc ma punkt przecięcia z osią OY równy 1. Zatem styczna w $x = 0$ ma równanie postaci $y = x + 1$. Jest to pokazane na rysunku 4.



Rysunek 4: Wykresy funkcji $f(x) = e^x$ oraz prosta styczna w punkcie $x = 0$.

Korzystając z postaci pochodnej funkcji wykładniczej $\exp(x)$ i reguły łańcucha, możemy teraz obliczyć pochodne złożenia funkcji z funkcją wykładniczą.

Przykład 6. Wyznacz pochodną funkcji $y = f(x) = \exp(kx)$.

Rozwiązanie. Jeśli $u = kx$ daje $y = e^u$. Zastosowanie reguły łańcucha prowadzi do:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx},$$

ale

$$\frac{du}{dx} = k, \quad \text{więc} \quad \frac{dy}{dx} = e^u k = k e^{kx}.$$

Wynik ten wykorzystamy w dalszej części wykładu.

Pochodną funkcji $f(x) = e^{kx}$ jest

$$\frac{de^{kt}}{dx} = k e^{kt}.$$

Przykład 7. (Reakcje chemiczne). Zgodnie z teorią zderzeń dwucząsteczkowe reakcje gazowe, reakcja między dwiema cząsteczkami zachodzi, gdy cząsteczki zderzają się z energią większą niż energia aktywacji, E_a , nazywana energią aktywacji Arrheniusa. Wielkość $E_a > 0$ jest stała specyficzna dla substancji biorących udział w reakcji. Ułamek zderzeń, w których to zderzenie zachodzi z energią większą niż energia aktywacji jest opisany przez

$$F = e^{-(E_a/RT)},$$

gdzie T to temperatura w stopniach Kelvina, a $R > 0$ to stała gazowa. Załóżmy, że temperatura T rośnie ze stałą szybkością C na jednostkę czasu. Określ szybkość zmian frakcji zderzeń F , które powodują zajście reakcji.

Rozwiązanie. Zauważmy, że F jest funkcja wykładniczą której argument jest funkcja zależna od temperatury. Ponieważ temperatura ulega zmianie w czasie więc funkcja f jako funkcja argumentu t czyli czasu jest funkcja złożoną

$$F(t) = e^{-(E_a/RT(t))}.$$

Biorąc to pod uwagę oraz fakt, iż $\frac{dT}{dt} = C$ i oznaczając $u = -E_a/RT$ otrzymujemy $F = e^u$. Używając zasady łańcuchowa,

$$\frac{dF}{dt} = \frac{dF}{du} \frac{du}{dT} \frac{dT}{dt}.$$

Ponieważ E_a , R , i C są stałymi, więc

$$\frac{dF}{du} = e^u \quad \text{oraz} \quad \frac{du}{dT} = \frac{E_a}{RT^2}.$$

Ostatecznie więc mamy,

$$\frac{dF}{dt} = e^u \frac{E_a}{RT^2} C = C \frac{E_a}{R} T^{-2} e^{-(E_a/RT)} = \frac{CE_a}{RT^2} e^{-(E_a/RT)}.$$

Zatem szybkość zmiany ułamka F zderzeń, które skutkują zajściem reakcji jest równa

$$\frac{CE_a}{RT^2} e^{-(E_a/RT)}.$$

1.4 Funkcja e^x jako punkt stały operatora pochodnej

Na chwilę kierujemy naszą uwagę na ciekawą obserwację. Wiemy, że funkcja

$$y = f(x) = e^x,$$

spełnia następującą zależność

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = f(x) = y.$$

Innymi słowy, podczas różniczkowania otrzymujemy ponownie tę samą funkcję. Podsumowujemy tę obserwację:

Funkcja $y = f(x) = e^x$ jest równa swojej własnej pochodnej. W związku z tym spełnia równanie

$$\frac{dy}{dx} = y.$$

Równanie łączące funkcję i jej pochodną (pochodne) nazywa się równaniem różniczkowym.

To jest nowy typ równania, w którym niewiadomą jest funkcja, a równanie zawiera pochodną lub pochodne funkcji będącej niewiadomą. Równania różniczkowe pojawiają się w wielu zagadnieniach jest w biologii, fizyce, chemii w naukach technicznych oraz ogólnie w nauce.

1.5 Logarytm naturalny jako funkcja odwrotna do funkcji wykładniczej e^x .

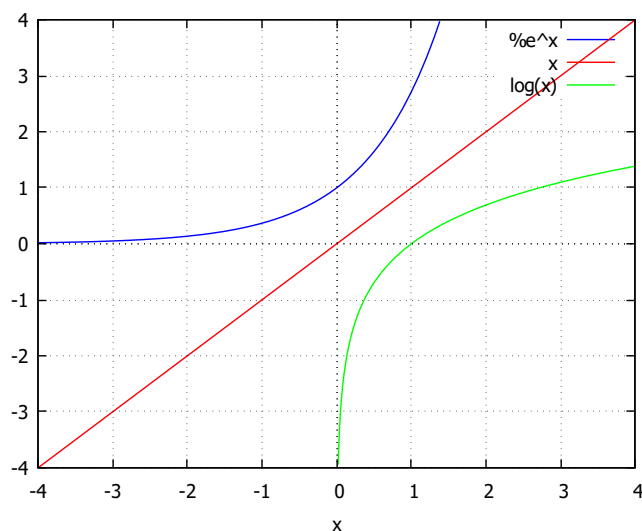
Dla funkcji $y = f(x) = e^x$ definiujemy jej funkcję odwrotną, oznaczaną przez $f^{-1}(x) = \log_e(x) \equiv \ln(x)$, jako funkcję dla której

$$f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x,$$

czyli

$$\ln(e^x) = e^{\ln(x)} = x.$$

Tak jak pokazane na rysunku 5, wykresy funkcji e^x i $\ln(x)$ są wzajemnymi odbiciami względem prostej $y = x$.



Rysunek 5: Wykres funkcji $y = e^x$ i jej funkcji odwrotnej, $y = \ln x$.

Własności logarytmu wynikają bezpośrednio z właściwości funkcji wykładniczej.

1. $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$,
2. $\ln(a^b) = b \ln(a)$,
3. $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = \ln(a^{-1}) = -\ln(a)$,
4. wzór na zamianę podstawy logarytmu

$$\log_n(a) = \frac{\ln(a)}{\ln(n)}, \quad n > 0.$$

1.6 Pochodna funkcji logarytmicznej $\ln(x)$

Znając pochodną oryginalnej funkcji, możemy obliczyć pochodną jej funkcji odwrotnej. W tym celu wykorzystamy związek między funkcją i jej funkcją odwrotną.

Niech $f(x)$ będzie funkcja różniczkowalna, a $f^{-1}(x)$ jej funkcja odwrotna. Ponieważ

$$f(f^{-1}(x)) = x,$$

więc

$$[f(f^{-1}(x))] = [x]'$$

Korzystając z wzoru na pochodną funkcji złożonej oraz faktu, że $[x]' = 1$ otrzymujemy

$$[f^{-1}(x)]' \cdot f'(f^{-1}(x)) = 1,$$

co można przekształcić do postaci

$$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

W ten sposób mamy do dyspozycji wzór umożliwiający wyznaczenie pochodnej funkcji odwrotnej do funkcji, dla której znamy pochodną.

Jeśli $f^{-1}(x)$ jej funkcja odwrotna do funkcji różniczkowalnej $f(x)$ to

$$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

W przypadku funkcji $f(x) = e^x$ oraz $f^{-1}(x) = \ln(x)$ otrzymujemy

$$[\ln(x)]' = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x}.$$

W ten sposób pokazaliśmy, że:

Pochodna funkcji logarytmicznej $\ln(x)$ to funkcja

$$\frac{d \ln(x)}{dx} = [\ln(x)]' = \frac{1}{x}.$$

Przykład 8. (Rozwój populacji bakterii). *Zaczynając od pojedynczej bakterii, jak długo trwa, zanim kolonia bakterii E. coli osiągnie rozmiar 6×10^{39} zakładając, że bakterie dzielą się co 20 minut?*

Rozwiązanie. Obliczamy czas potrzebny na osiągnięcie wymaganej liczebności 6×10^{39} , rozwiązując ze względu na t równanie

$$B(t) = 2^{\frac{1}{20}t} = 6 \times 10^{39}.$$

$$6 \times 10^{39} = 2^{t/20} \implies \ln(6 \times 10^{39}) = \ln(2^{t/20})$$

$$\ln(6) + 39 \ln(10) = \frac{t}{20} \ln(2).$$

Możemy teraz wyznaczyć wartość t dla której spełniona jest powyższa równość:

$$t = 20 \frac{\ln(6) + 39 \ln(10)}{\ln(2)} = 20 \frac{1,79 + 39 \times 2,3}{0,693} = 2640,4 [min] = \frac{2640,4}{60} [godz].$$

W związku z tym potrzeba 44 godzin, ale mniej niż 2 dni, aby kolonia osiągnęła masę Ziemi. Na szczęście przy założeniu nieprawdopodobnego scenariusza nieograniczonego wzrostu.

Krzysztof Topolski