

# Testowanie hipotez statystycznych.

Krzysztof Topolski

Statystyka  
Wykład 10

Wrocław, 22 grudnia 2011

## Definicja.

*Hipotezą statystyczną* nazywamy stwierdzenie dotyczące parametrów populacji.

## Definicja.

Dwie komplementarne w problemie testowania hipotez hipotezy nazywamy odpowiednio *hipotezą zerową* i *hipotezą alternatywną*. Oznaczamy je odpowiednio  $H_0$  i  $H_1$  (czasami  $H_1$  oznaczana jest przez  $H_A$ ).

## Definicja.

*Hipotezą statystyczną* nazywamy stwierdzenie dotyczące parametrów populacji.

## Definicja.

Dwie komplementarne w problemie testowania hipotez hipotezy nazywamy odpowiednio *hipotezą zerową* i *hipotezą alternatywną*. Oznaczamy je odpowiednio  $H_0$  i  $H_1$  (czasami  $H_1$  oznaczana jest przez  $H_A$ ).

## Definicja.

*Hipotezą statystyczną* nazywamy stwierdzenie dotyczące parametrów populacji.

## Definicja.

Dwie komplementarne w problemie testowania hipotez hipotezy nazywamy odpowiednio *hipotezą zerową* i *hipotezą alternatywną*. Oznaczamy je odpowiednio  $H_0$  i  $H_1$  (czasami  $H_1$  oznaczana jest przez  $H_A$ ).

# Testowanie hipotez statystycznych

Jeśli  $\theta$  oznacza parametr populacji, wtedy ogólna postać hipotez hipotezy zerowej i hipotezy alternatywnej przyjmuje postać

$$H_0 : \theta \in \Theta_0,$$

$$H_1 : \theta \in \Theta_0^c,$$

gdzie  $\Theta_0$  jest pewnym podzbiorem przestrzeni parametrów a  $\Theta_0^c$  jego dopełnieniem.

$$H_0 : \theta = 0,$$

$$H_1 : \theta \neq 0.$$

$$H_0 : \theta \geq \theta_0,$$

$$H_1 : \theta < \theta_0.$$

# Testowanie hipotez statystycznych

Jeśli  $\theta$  oznacza parametr populacji, wtedy ogólna postać hipotez hipotezy zerowej i hipotezy alternatywnej przyjmuje postać

$$H_0 : \theta \in \Theta_0,$$

$$H_1 : \theta \in \Theta_0^c,$$

gdzie  $\Theta_0$  jest pewnym podzbiorem przestrzeni parametrów a  $\Theta_0^c$  jego dopełnieniem.

$$H_0 : \theta = 0,$$

$$H_1 : \theta \neq 0.$$

$$H_0 : \theta \geq \theta_0,$$

$$H_1 : \theta < \theta_0.$$

# Testowanie hipotez statystycznych

Jeśli  $\theta$  oznacza parametr populacji, wtedy ogólna postać hipotez hipotezy zerowej i hipotezy alternatywnej przyjmuje postać

$$H_0 : \theta \in \Theta_0,$$

$$H_1 : \theta \in \Theta_0^c,$$

gdzie  $\Theta_0$  jest pewnym podzbiorem przestrzeni parametrów a  $\Theta_0^c$  jego dopełnieniem.

$$H_0 : \theta = 0,$$

$$H_1 : \theta \neq 0.$$

$$H_0 : \theta \geq \theta_0,$$

$$H_1 : \theta < \theta_0.$$

## Definicja.

Procedura *testowania hipotezy statystycznej* lub *test hipotezy* polega na znalezieniu reguły, która pozwala podjąć decyzję

- dla jakich wartości próby zaakceptować hipotezę zerową jako prawdziwą,
- dla jakich wartości próby odrzucić hipotezę zerową i zaakceptować jako prawdziwą hipotezę alternatywną.

Zbiór tych wartości próby, dla których  $H_0$  jest odrzucana nazywamy *zbiorem krytycznym* lub *obszarem krytycznym*. Dopełnienie obszaru krytycznego nazywamy *obszarem przyjęcia* hipotezy zerowej.

## Definicja.

Procedura *testowania hipotezy statystycznej* lub *test hipotezy* polega na znalezieniu reguły, która pozwala podjąć decyzję

- dla jakich wartości próby zaakceptować hipotezę zerową jako prawdziwą,
- dla jakich wartości próby odrzucić hipotezę zerową i zaakceptować jako prawdziwą hipotezę alternatywną.

Zbiór tych wartości próby, dla których  $H_0$  jest odrzucana nazywamy *zbiorem krytycznym* lub *obszarem krytycznym*. Dopełnienie obszaru krytycznego nazywamy *obszarem przyjęcia* hipotezy zerowej.

## Definicja.

Procedura *testowania hipotezy statystycznej* lub *test hipotezy* polega na znalezieniu reguły, która pozwala podjąć decyzję

- dla jakich wartości próby zaakceptować hipotezę zerową jako prawdziwą,
- dla jakich wartości próby odrzucić hipotezę zerową i zaakceptować jako prawdziwą hipotezę alternatywną.

Zbiór tych wartości próby, dla których  $H_0$  jest odrzucana nazywamy *zbiorem krytycznym* lub *obszarem krytycznym*. Dopełnienie obszaru krytycznego nazywamy *obszarem przyjęcia* hipotezy zerowej.

## Definicja.

Procedura *testowania hipotezy statystycznej* lub *test hipotezy* polega na znalezieniu reguły, która pozwala podjąć decyzję

- dla jakich wartości próby zaakceptować hipotezę zerową jako prawdziwą,
- dla jakich wartości próby odrzucić hipotezę zerową i zaakceptować jako prawdziwą hipotezę alternatywną.

Zbiór tych wartości próby, dla których  $H_0$  jest odrzucana nazywamy *zbiorem krytycznym* lub *obszarem krytycznym*. Dopełnienie obszaru krytycznego nazywamy *obszarem przyjęcia* hipotezy zerowej.

## Definicja.

Procedura *testowania hipotezy statystycznej* lub *test hipotezy* polega na znalezieniu reguły, która pozwala podjąć decyzję

- dla jakich wartości próby zaakceptować hipotezę zerową jako prawdziwą,
- dla jakich wartości próby odrzucić hipotezę zerową i zaakceptować jako prawdziwą hipotezę alternatywną.

Zbiór tych wartości próby, dla których  $H_0$  jest odrzucana nazywamy *zbiorem krytycznym* lub *obszarem krytycznym*. Dopełnienie obszaru krytycznego nazywamy *obszarem przyjęcia* hipotezy zerowej.

# Metody konstrukcji testów statystycznych

Niech  $X_1, \dots, X_n$  będzie próbą losową z rozkładu o gęstości  $f(x|\theta)$  ( $\theta$  może być wektorem). Funkcję wiarygodności  $L(\theta)$  definiujemy w następujący sposób

$$L(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n) = L(\theta|\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}|\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta).$$

Niech  $\Theta$  oznacza całą przestrzeń wartości parametru populacji.

### Definicja.

Statystyka testowa testu ilorazu wiarygodności dla testowania hipotezy  $H_0 : \theta \in \Theta_0$  przeciwko hipotezie alternatywnej  $H_1 : \theta \in \Theta_0^c$  ma postać

$$\lambda(\mathbf{x}) = \frac{\sup_{\theta \in \Theta_0} L(\theta|\mathbf{x})}{\sup_{\theta \in \Theta} L(\theta|\mathbf{x})}.$$

Test ilorazu wiarygodności to dowolny test, którego obszar odrzucenia hipotezy zerowej jest postaci

$$\{\mathbf{x} : \lambda(\mathbf{x}) \leq c\},$$

gdzie  $c$  jest dowolną liczbą  $0 \leq c \leq 1$ .

Niech  $\Theta$  oznacza całą przestrzeń wartości parametru populacji.

### Definicja.

*Statystyka testowa testu ilorazu wiarygodności* dla testowania hipotezy  $H_0 : \theta \in \Theta_0$  przeciwko hipotezie alternatywnej  $H_1 : \theta \in \Theta_0^c$  ma postać

$$\lambda(\mathbf{x}) = \frac{\sup_{\Theta_0} L(\theta|\mathbf{x})}{\sup_{\Theta} L(\theta|\mathbf{x})}.$$

Test ilorazu wiarygodności to dowolny test, którego obszar odrzucenia hipotezy zerowej jest postaci

$$\{\mathbf{x} : \lambda(\mathbf{x}) \leq c\},$$

gdzie  $c$  jest dowolną liczbą  $0 \leq c \leq 1$ .

## Przykład.

Niech  $X_1, \dots, X_n$  będzie próba losową z rozkładu normalnego  $N(\mu, 1)$  o gęstości

$$f(x|\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(x-\mu)^2}{2}}.$$

Funkcja wiarygodności ma postać

$$L(\theta|\mathbf{x}) = (2\pi)^{-n/2} \exp \left[ -\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 / 2 \right].$$

## Przykład cd.

Statystyka testowa dla testu ilorazu wiarygodności dla testowania hipotezy  $H_0 : \mu = \mu_0$  przeciwko hipotezie alternatywnej  $H_1 : \mu \neq \mu_0$ , gdzie  $\mu$  jest ustaloną z góry wartością, ma postać

$$\lambda(\mathbf{x}) = \frac{(2\pi)^{-n/2} \exp \left[ - \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2 / 2 \right]}{(2\pi)^{-n/2} \exp \left[ - \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 / 2 \right]}$$

Po przekształceniach

$$\lambda(\mathbf{x}) = \exp \left[ \left( - \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2 + \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right) / 2 \right].$$

## Przykład cd.

$$\lambda(\mathbf{x}) = \exp \left[ \left( - \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2 + \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right) / 2 \right].$$

Biorąc pod uwagę równość

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - \mu_0)^2,$$

otrzymujemy

$$\lambda(\mathbf{x}) = \exp \left[ -n(\bar{x} - \mu_0)^2 / 2 \right].$$

Obszar krytyczny  $\{\mathbf{x} : \lambda(\mathbf{x}) \leq c\}$  testu ilorazu wiarygodności ma w tym przypadku postać

$$\left\{ \mathbf{x} : |\bar{x} - \mu_0| \geq \sqrt{\frac{-2 \ln c}{n}} \right\}.$$

## Przykład.

Niech  $X_1, \dots, X_n$  będzie próba losową z rozkładu wykładniczego

$$f(x|\theta) = \begin{cases} e^{-(x-\theta)} & , \quad x \geq \theta, \\ 0 & , \quad x < \theta, \end{cases}$$

gdzie  $-\infty < \theta < \infty$ . Funkcja wiarygodności ma postać

$$L(\theta|\mathbf{x}) = \begin{cases} e^{-\sum_{i=1}^n x_i + n\theta} & , \quad \theta \leq \min x_i, \\ 0 & , \quad \theta > \min x_i, \end{cases}$$

## Przykład cd.

Testu ilorazu wiarygodności dla testowania hipotezy  $H_0 : \theta \leq 5$  przeciwko hipotezie alternatywnej  $H_1 : \theta > 5$  ma postać

$$\lambda(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & , \quad x_{(1:n)} \leq 5, \\ e^{-n(x_{(1:n)}-5)} & , \quad x_{(1:n)} > 5, \end{cases}$$

gdzie  $x_{(1:n)} = \max_{1 \leq i \leq n} x_i$ . Obszar krytyczny testu ilorazu wiarygodności ma w tym przypadku postać

$$\left\{ \mathbf{x} : x_{(1:n)} \geq 5 - \frac{\ln c}{n} \right\}.$$

*Weryfikacja hipotez statystycznych  
dotyczących wartości oczekiwanej  
w populacji o rozkładzie normalnym.*

# Model 1.

Testowanie hipotezy dotyczącej średniej gdy wariancja jest znana.

Niech  $X_1, \dots, X_n$  będzie próbą statystyczną z rozkładu  $N(\mu, \sigma^2)$ , przy czym  $\sigma^2$  jest **znane**.

Testujemy hipotezę

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

przeciwko jednej z następujących hipotez alternatywnych

$$H_1 : \mu < \mu_0,$$

$$H_2 : \mu > \mu_0,$$

$$H_3 : \mu \neq \mu_0.$$

# Model 1.

Testowanie hipotezy dotyczącej średniej gdy wariancja jest znana.

Niech  $X_1, \dots, X_n$  będzie próbą statystyczną z rozkładu  $N(\mu, \sigma^2)$ , przy czym  $\sigma^2$  jest **znane**.

Testujemy hipotezę

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

przeciwko jednej z następujących hipotez alternatywnych

$$H_1 : \mu < \mu_0,$$

$$H_2 : \mu > \mu_0,$$

$$H_3 : \mu \neq \mu_0.$$

# Model 1.

Testowanie hipotezy dotyczącej średniej gdy wariancja jest znana.

Niech  $X_1, \dots, X_n$  będzie próbą statystyczną z rozkładu  $N(\mu, \sigma^2)$ , przy czym  $\sigma^2$  jest **znane**.

Testujemy hipotezę

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

przeciwko jednej z następujących hipotez alternatywnych

$$H_1 : \mu < \mu_0,$$

$$H_2 : \mu > \mu_0,$$

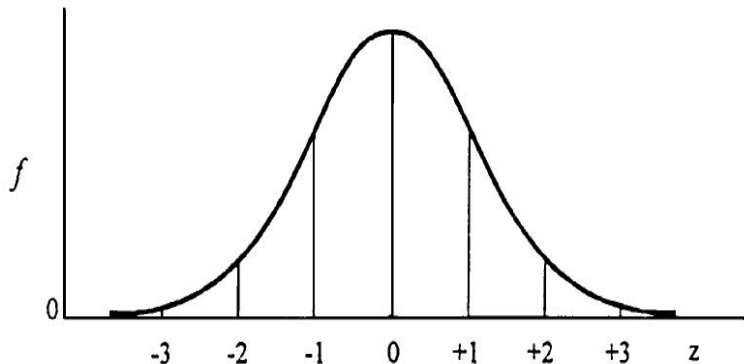
$$H_3 : \mu \neq \mu_0.$$

Jako statystyki testowej użyjemy

$$Z = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n},$$

która, gdy hipoteza  $H_0$  jest prawdziwa, ma standardowy rozkład normalny  $N(0, 1)$ .

# Gęstość standardowego rozkładu normalnego.



Niech  $z_p$  będzie kwantylem rzędu  $p$  rozkładu  $N(0, 1)$ .

|                          | $z_{.05}$ | $z_{.01}$ |
|--------------------------|-----------|-----------|
| <b>Two-tailed values</b> | 1.96      | 2.58      |
| <b>One-tailed values</b> | 1.65      | 2.33      |

*Typowe kwantyle standardowego rozkładu normalnego.*

Niech  $z_p$  będzie kwantylem rzędu  $p$  rozkładu  $N(0, 1)$ .

|                          | $z_{.05}$ | $z_{.01}$ |
|--------------------------|-----------|-----------|
| <b>Two-tailed values</b> | 1.96      | 2.58      |
| <b>One-tailed values</b> | 1.65      | 2.33      |

*Typowe kwantyle standardowego rozkładu normalnego.*

Na poziomie istotności  $\alpha$  zbiory krytyczne testów dla poszczególnych alternatyw mają odpowiednio postać:

1)  $C = (-\infty, -z_{1-\alpha}]$  – dla alternatywy  $H_1$

2)  $C = [z_{1-\alpha}, \infty)$  – dla alternatywy  $H_2$

3)  $C = (-\infty, -z_{1-\alpha/2}] \cup [z_{1-\alpha/2}, \infty)$  – dla alternatywy  $H_3$

Na poziomie istotności  $\alpha$  zbiory krytyczne testów dla poszczególnych alternatyw mają odpowiednio postać:

1)  $C = (-\infty, -z_{1-\alpha}]$  – dla alternatywy  $H_1$

2)  $C = [z_{1-\alpha}, \infty)$  – dla alternatywy  $H_2$

3)  $C = (-\infty, -z_{1-\alpha/2}] \cup [z_{1-\alpha/2}, \infty)$  – dla alternatywy  $H_3$

Na poziomie istotności  $\alpha$  zbiory krytyczne testów dla poszczególnych alternatyw mają odpowiednio postać:

1)  $C = (-\infty, -z_{1-\alpha}]$  – dla alternatywy  $H_1$

2)  $C = [z_{1-\alpha}, \infty)$  – dla alternatywy  $H_2$

3)  $C = (-\infty, -z_{1-\alpha/2}] \cup [z_{1-\alpha/2}, \infty)$  – dla alternatywy  $H_3$

## PRZYKŁAD 1.

Przyjmując, że wynik pomiaru nieznaney rezystancji  $\mu$  opornika jest zmienną losową o rozkładzie  $N(\mu, \sigma^2)$ , należy przetestować na poziomie istotności  $\alpha = 0.05$  hipotezę

$$H : \mu = 500 \text{ m}\Omega$$

przeciw alternatywie

$$K : \mu \neq 500 \text{ m}\Omega$$

Wykonano  $n = 10$  pomiarów przyrządem pomiarowym, którego odchylenie standardowe (błąd pomiaru jest znane i wynosi  $4 \text{ m}\Omega$ ). Otrzymano następujące wyniki:

506, 502, 498, 501, 503, 504, 498, 503, 501, 504 [ $\text{m}\Omega$ ].

## PRZYKŁAD 1.

Przyjmując, że wynik pomiaru nieznaney rezystancji  $\mu$  opornika jest zmienną losową o rozkładzie  $N(\mu, \sigma^2)$ , należy przetestować na poziomie istotności  $\alpha = 0.05$  hipotezę

$$H : \mu = 500 \text{ m}\Omega$$

przeciw alternatywie

$$K : \mu \neq 500 \text{ m}\Omega$$

Wykonano  $n = 10$  pomiarów przyrządem pomiarowym, którego odchylenie standardowe (błąd pomiaru jest znane i wynosi  $4 \text{ m}\Omega$ ). Otrzymano następujące wyniki:

506, 502, 498, 501, 503, 504, 498, 503, 501, 504 [ $\text{m}\Omega$ ].

## PRZYKŁAD 1.

Przyjmując, że wynik pomiaru nieznaney rezystancji  $\mu$  opornika jest zmienną losową o rozkładzie  $N(\mu, \sigma^2)$ , należy przetestować na poziomie istotności  $\alpha = 0.05$  hipotezę

$$H : \mu = 500 \text{ m}\Omega$$

przeciw alternatywie

$$K : \mu \neq 500 \text{ m}\Omega$$

Wykonano  $n = 10$  pomiarów przyrządem pomiarowym, którego odchylenie standardowe (błędu pomiaru jest znane i wynosi  $4 \text{ m}\Omega$ . Otrzymano następujące wyniki:

506, 502, 498, 501, 503, 504, 498, 503, 501, 504 [ $\text{m}\Omega$ ].

## PRZYKŁAD 1. (cd.)

W wyniku obliczeń otrzymujemy  $\bar{X}_n = 502$  oraz

$$T = \frac{502 - 500}{4} \sqrt{10} \approx 1.581$$

W tablicach statystycznych znajdujemy wartość odpowiedniego kwantyla dla dwustronnej alternatywy i poziomu istotności  $\alpha = 0,05$ . Wynosi ona  $z(0.975) = 1.96$ . A zatem

$$T \notin C = (-\infty, -1.96] \cup [1.96, \infty).$$

Nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy  $H$ .

## PRZYKŁAD 2.

W celu sprawdzenia jakości produkcji pewnego odczynnika wykonano  $n = 30$  pomiarów losowo wybranych próbek mierząc zawartość pewnego składnika, którego zawartość zgodnie z normami produkcyjnymi powinna wynosić 8%, z odchyleniem standardowym  $\sigma = 2$ . Średnia wartość zawartości tego składnika w 30 próbkach wyniosła 7,4.

Przyjmując, że zawartość badanego składnika ma rozkład normalny, należy przetestować, na poziomie istotności  $\alpha = 0.05$ , hipotezę

$$H_0 : \mu = 8$$

przeciw alternatywie

$$H_1 : \mu \neq 8.$$

## PRZYKŁAD 2.

W celu sprawdzenia jakości produkcji pewnego odczynnika wykonano  $n = 30$  pomiarów losowo wybranych próbek mierząc zawartość pewnego składnika, którego zawartość zgodnie z normami produkcyjnymi powinna wynosić 8%, z odchyleniem standardowym  $\sigma = 2$ . Średnia wartość zawartości tego składnika w 30 próbkach wyniosła 7,4.

Przyjmując, że zawartość badanego składnika ma rozkład normalny, należy przetestować, na poziomie istotności  $\alpha = 0.05$ , hipotezę

$$H_0 : \mu = 8$$

przeciw alternatywie

$$H_1 : \mu \neq 8.$$

## PRZYKŁAD 2.

W celu sprawdzenia jakości produkcji pewnego odczynnika wykonano  $n = 30$  pomiarów losowo wybranych próbek mierząc zawartość pewnego składnika, którego zawartość zgodnie z normami produkcyjnymi powinna wynosić 8%, z odchyleniem standardowym  $\sigma = 2$ . Średnia wartość zawartości tego składnika w 30 próbkach wyniosła 7,4.

Przyjmując, że zawartość badanego składnika ma rozkład normalny, należy przetestować, na poziomie istotności  $\alpha = 0.05$ , hipotezę

$$H_0 : \mu = 8$$

przeciw alternatywie

$$H_1 : \mu \neq 8.$$

## PRZYKŁAD 2. (cd)

W wyniku obliczeń otrzymujemy

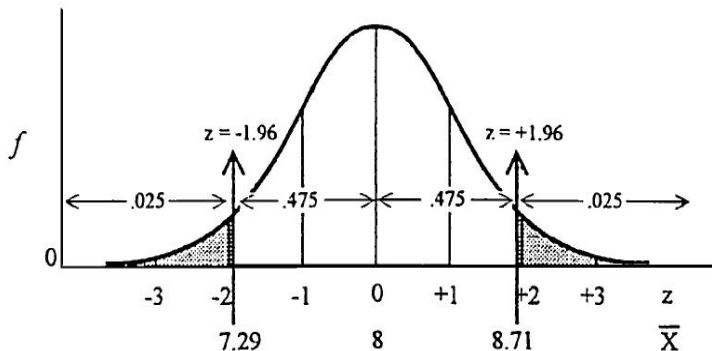
$$z = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{7,4 - 8}{0,36}.$$

W tablicach statystycznych znajdujemy wartość kwantyla  $z(0.975) = 1.96$ . A zatem

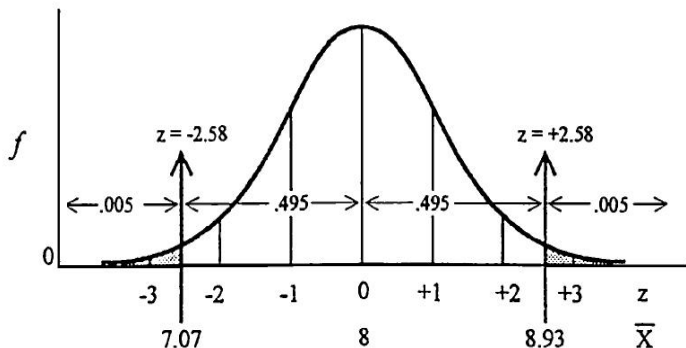
$$z \notin C = (-\infty, -1.96] \cup [1.96, \infty).$$

Nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy  $H$ .

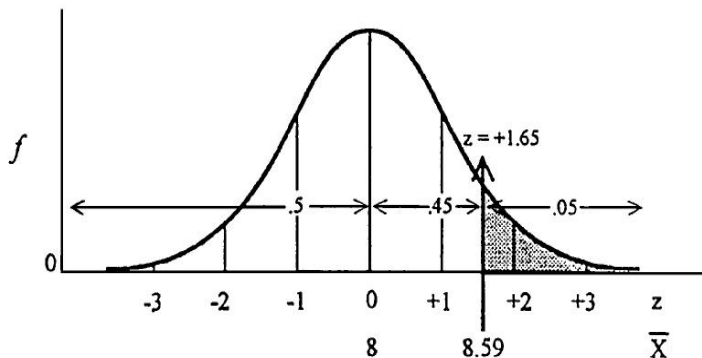
Test na poziomie istotności  $\alpha = 0,05$ , hipotezy  $H_0 : \mu = 8$  przy dwustronnej hipotezie alternatywnej  $H_1 : \mu \neq 8$ .



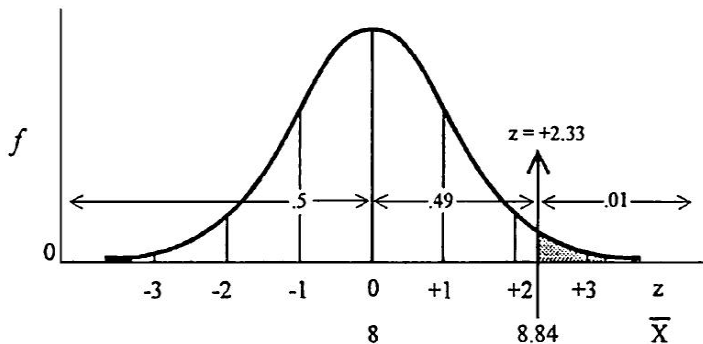
Test na poziomie istotności  $\alpha = 0,01$ , hipotezy  $H_0 : \mu = 8$  przy dwustronnej hipotezie alternatywnej  $H_1 : \mu \neq 8$ .



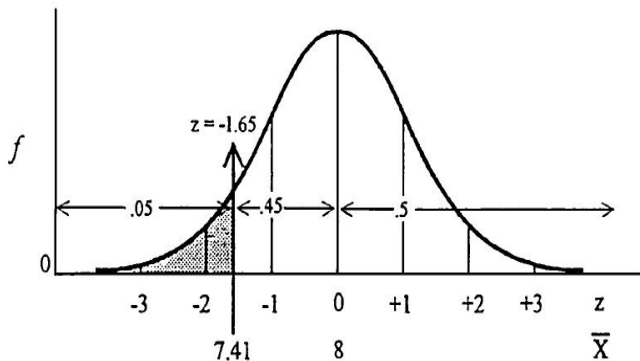
Test na poziomie istotności  $\alpha = 0,05$ , hipotezy  $H_0 : \mu = 8$  przy jednostronnej hipotezie alternatywnej  $H_1 : \mu > 8$ .



Test na poziomie istotności  $\alpha = 0,01$ , hipotezy  $H_0 : \mu = 8$  przy jednostronnej hipotezie alternatywnej  $H_1 : \mu > 8$ .



Test na poziomie istotności  $\alpha = 0,05$ , hipotezy  $H_0 : \mu = 8$  przy jednostronnej hipotezie alternatywnej  $H_1 : \mu < 8$ .



Test na poziomie istotności  $\alpha = 0,01$ , hipotezy  $H_0 : \mu = 8$  przy jednostronnej hipotezie alternatywnej  $H_1; \mu < 8$ .

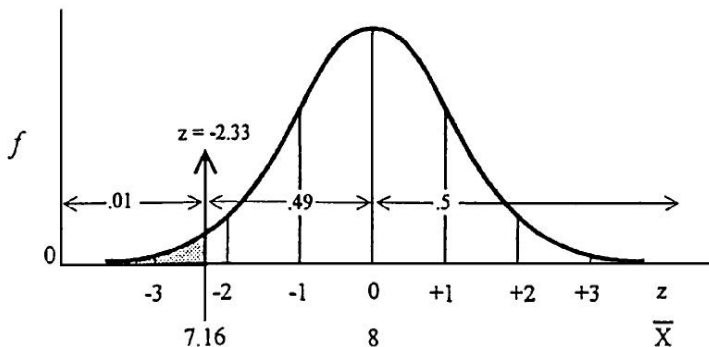


Tabela decyzji dla testowania hipotezy  $H_0 : \mu = 8$  przy różnych poziomach istotności  $\alpha$  oraz różnych alternatywach.

**Table 1.3 Decision Table for  $z$  Values**

| Obtained<br>$z$ value | Alternative<br>hypothesis | Decision                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|-----------------------|---------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1.75                  | $H_1: \mu \neq 8$         | The null hypothesis cannot be rejected, since the obtained value $z = 1.75$ is less than the tabled critical two-tailed .05 and .01 values $z_{.05} = 1.96$ and $z_{.01} = 2.58$ .                                                                                                                                                                          |
|                       | $H_1: \mu > 8$            | The null hypothesis can be rejected at the .05 level of significance, since the obtained value $z = 1.75$ is a positive number which is greater than the tabled critical one-tailed .05 value $z_{.05} = 1.65$ . The null hypothesis cannot be rejected at the .01 level, since it is less than the tabled critical one-tailed .01 value $z_{.01} = 2.33$ . |
|                       | $H_1: \mu < 8$            | The null hypothesis cannot be rejected, since the obtained value $z = 1.75$ is a positive number.                                                                                                                                                                                                                                                           |
| -2.75                 | $H_1: \mu \neq 8$         | The null hypothesis can be rejected at both the .05 and .01 levels of significance, since the obtained absolute value $z = 2.75$ is greater than the tabled critical two-tailed .05 and .01 values $z_{.05} = 1.96$ and $z_{.01} = 2.58$ .                                                                                                                  |
|                       | $H_1: \mu > 8$            | The null hypothesis cannot be rejected, since the obtained value $z = -2.75$ is a negative number.                                                                                                                                                                                                                                                          |
|                       | $H_1: \mu < 8$            | The null hypothesis can be rejected at both the .05 and .01 levels of significance, since the obtained value $z = -2.75$ is a negative number and the absolute value $z = 2.75$ is greater than the tabled critical one-tailed .05 and .01 values $z_{.05} = 1.65$ and $z_{.01} = 2.33$ .                                                                   |
| .75                   | $H_1: \mu \neq 8$         | The null hypothesis cannot be rejected, since the obtained value $z = .75$ is less than the tabled critical two-tailed .05 and .01 values $z_{.05} = 1.96$ and $z_{.01} = 2.58$ .                                                                                                                                                                           |
|                       | $H_1: \mu > 8$            | The null hypothesis cannot be rejected, since the obtained value $z = .75$ is less than the tabled critical one-tailed .05 and .01 values $z_{.05} = 1.65$ and $z_{.01} = 2.33$ .                                                                                                                                                                           |
|                       | $H_1: \mu < 8$            | The null hypothesis cannot be rejected, since the obtained value $z = .75$ is a positive number.                                                                                                                                                                                                                                                            |

# Model 2.

## Testowanie średniej gdy wariancja jest nieznana.

Niech  $X_1, \dots, X_n$  będzie próbą statystyczną z rozkładu  $N(\mu, \sigma^2)$ , przy czym zarówno  $\mu$  jak i  $\sigma^2$  są **nieznane**.

Testujemy hipotezę

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

przeciwko jednej z następujących hipotez alternatywnych

$$H_1 : \mu < \mu_0,$$

$$H_2 : \mu > \mu_0,$$

$$H_3 : \mu \neq \mu_0.$$

# Model 2.

## Testowanie średniej gdy wariancja jest nieznana.

Niech  $X_1, \dots, X_n$  będzie próbą statystyczną z rozkładu  $N(\mu, \sigma^2)$ , przy czym zarówno  $\mu$  jak i  $\sigma^2$  są **nieznane**.

Testujemy hipotezę

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

przeciwko jednej z następujących hipotez alternatywnych

$$H_1 : \mu < \mu_0,$$

$$H_2 : \mu > \mu_0,$$

$$H_3 : \mu \neq \mu_0.$$

# Model 2.

## Testowanie średniej gdy wariancja jest nieznana.

Niech  $X_1, \dots, X_n$  będzie próbą statystyczną z rozkładu  $N(\mu, \sigma^2)$ , przy czym zarówno  $\mu$  jak i  $\sigma^2$  są **nieznane**.

Testujemy hipotezę

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

przeciwko jednej z następujących hipotez alternatywnych

$$H_1 : \mu < \mu_0,$$

$$H_2 : \mu > \mu_0,$$

$$H_3 : \mu \neq \mu_0.$$

## Model 2. (cd.)

Ponieważ wariancja jest nieznana więc przy konstrukcji statystyki testowej użyjemy nieobciążonego estymatora wariancji  $S^2$

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2.$$

Jako statystyki testowej użyjemy

$$T = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{S_n} \sqrt{n},$$

która, gdy hipoteza  $H_0$  jest prawdziwa, ma rozkład  $t$ –Studenta o  $n - 1$  stopniach swobody.

Niech  $t_p(n)$  będzie kwantylem rzędu  $p$  rozkładu  $t$ -Studenta o  $n$  stopniach swobody.

*Kwantyle rozkładu  $t$ -Studenta z 9 stopniami swobody.*

|                          | $t_{.05}$ | $t_{.01}$ |
|--------------------------|-----------|-----------|
| <b>Two-tailed values</b> | 2.26      | 3.25      |
| <b>One-tailed values</b> | 1.83      | 2.82      |

Niech  $t_p(n)$  będzie kwantylem rzędu  $p$  rozkładu  $t$ -Studenta o  $n$  stopniach swobody.

*Kwantyle rozkładu  $t$ -Studenta z 9 stopniami swobody.*

|                          | $t_{.05}$ | $t_{.01}$ |
|--------------------------|-----------|-----------|
| <b>Two-tailed values</b> | 2.26      | 3.25      |
| <b>One-tailed values</b> | 1.83      | 2.82      |

Niech  $t_p(n)$  będzie kwantylem rzędu  $p$  rozkładu  $t$ -Studenta o  $n$  stopniach swobody.

*Kwantyle rozkładu  $t$ -Studenta z 9 stopniami swobody.*

|                          | $t_{.05}$ | $t_{.01}$ |
|--------------------------|-----------|-----------|
| <b>Two-tailed values</b> | 2.26      | 3.25      |
| <b>One-tailed values</b> | 1.83      | 2.82      |

Na poziomie istotności  $\alpha$  zbiory krytyczne testów dla poszczególnych alternatyw mają odpowiednio postać:

1)  $C = (-\infty, -t_{1-\alpha}(n-1)]$  – dla alternatywy  $H_1$

2)  $C = [t_{1-\alpha}(n-1), \infty)$  – dla alternatywy  $H_2$

3)  $C = (-\infty, -t_{1-\alpha/2}(n-1)] \cup [t_{1-\alpha/2}(n-1), \infty)$  – dla  $H_3$

### PRZYKŁAD 3.

Można przyjąć, że wzrost osobników danej płci w populacji ma rozkład normalny  $N(\mu, \sigma^2)$ . Z przeprowadzonych w przeszłości badań wiadomo, że średnia dla chłopców w wieku 14 lat wynosiła 154 cm. Przypuszczamy, że w wyniku polepszenia warunków życia nastąpiło zwiększenie średniego wzrostu. Na poziomie istotności  $\alpha = 0.05$  zweryfikujemy hipotezę

$$H : \mu = 154 \text{ cm}$$

Przeciw alternatywie

$$K : \mu > 154 \text{ cm}.$$

### PRZYKŁAD 3. (cd.)

Pobrano próbę losową o licznosci  $n = 26$ , na podstawie której otrzymano  $\overline{X}_n = 162$  cm oraz  $S_n = 14$  cm.

Wartość obliczona na podstawie wyników próby

$$T = 2.86.$$

Ponieważ  $t_{0.95}(25) = 1.708$ , więc zbiór krytyczny ma postać

$$C = [1.708, \infty).$$

Hipotezę  $H$  odrzucamy, gdyż  $T \in C$ .

Przy wielokrotnym stosowaniu opisanego testu, częstość popełniania błędu pierwszego rodzaju będzie rzędu 0.05, natomiast częstość popełniania błędu drugiego rodzaju zależy od tego, który parametr  $\mu$  z hipotezy alternatywnej  $K$  opisuje rozkład badanej cechy.

## Porównanie średnich w dwóch rozkładach normalnych.

Niech  $X_1, \dots, X_n$  będzie próbą statystyczną z rozkładu normalnego  $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ , a  $Y_1, \dots, Y_m$  będzie próbą statystyczną z rozkładu normalnego  $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ . Zakładamy, że  $\sigma_1^2$  oraz  $\sigma_2^2$  są **nieznane**, ale są sobie równe

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2.$$

Testujemy hipotezę

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

przeciwko jednej z następujących hipotez alternatywnych

## Model 3. (cd.)

$$H_1 : \mu_1 < \mu_2,$$

$$H_2 : \mu_1 > \mu_2,$$

$$H_3 : \mu_1 \neq \mu_2.$$

Ponieważ wariancja jest nieznana więc przy konstrukcji statystyki testowej użyjemy nieobciążonego estymatora wariancji  $S^2$

$$S_X^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2.$$

Jako statystyki testowej użyjemy

$$T = \frac{\overline{X}_n - \overline{Y}_m}{\sqrt{nS_X^2 + mS_Y^2}} \sqrt{\frac{nm}{n+m}(n+m-2)},$$

gdzie  $\overline{X}_n$  i  $\overline{Y}_m$  oznaczają odpowiednie średnie próbkowe, a  $S_X^2$  i  $S_Y^2$  oznaczają wariancje próbkowe

$$S_X^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2,$$

$$S_Y^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (Y_i - \overline{Y}_m)^2.$$

Statystyka  $T$  ma rozkład  $t$ -Studenta o  $(n+m-2)$  stopniach swobody, gdy hipoteza  $H_0$  jest prawdziwa.

Niech  $t_p(n)$  będzie kwantylem rzędu  $p$  rozkładu  $t$ -Studenta o  $n$  stopniach swobody. Na poziomie istotności  $\alpha$  zbiory krytyczne testów dla poszczególnych alternatyw mają odpowiednio postać:

- 1)  $C = (-\infty, -t_{1-\alpha}(n + m - 2)]$  – dla alternatywy  $H_1$
- 2)  $C = (t_{1-\alpha}(n + m - 2), \infty]$  – dla alternatywy  $H_2$
- 3)  $C = (-\infty, -t_{1-\alpha/2}(n + m - 2)] \cup [t_{1-\alpha/2}(n + m - 2), \infty)$   
– dla alternatywy  $H_3$

### Porównanie wartości oczekiwanych *zależnych par obserwacji*.

Niech  $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$  będzie próbą losową złożoną z par wzajemnie niezależnych zmiennych losowych które w parze mogą być zależne. tego typu obserwacje pojawiają się w sposób naturalny w sytuacji dwukrotnego mierzenia wartości pewnej cech tego samego obiektu.

## Model 3 (zależne pary obserwacji).

Oznaczmy przez  $D_i = X_i - Y_i$ , i przyjmijmy założenie, że  $(D_1, \dots, D_n)$  tworzą próbę niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym  $N(\mu_D, \sigma_D^2)$  z nieznaną średnią  $\mu_D$ .

Hipoteza zerowa przyjmuje postać

$$H_0 : \mu_D = 0$$

natomiast hipotezy alternatywne postać

$$H_1 : \mu_D < 0,$$

$$H_2 : \mu_D > 0,$$

$$H_3 : \mu_D \neq 0.$$

## Statystyka testowa

$$T = \frac{\overline{D}}{S_D/\sqrt{n}},$$

gdzie

$$\overline{D} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - Y_i)$$

a

$$S_D = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n ((X_i - Y_i) - \overline{D})^2,$$

ma rozkład  $t$ –Studenta z  $(n-1)$  stopniami swobody.

W ten sposób zadanie konstrukcji testu dla porównania wartości średnich par obserwacji sprowadza się do analogicznego zadania dla pojedynczej próby i pojedynczej wartości średniej (wartości średniej różnic  $D_i$  przy nieznajomości ich odchylenia standardowego).

## Przykład

Jednym z testów, którym rozpoczęto analizę nowego leku na nadciśnienie tętnicze było zaaplikowanie go próbie 22 chorych pacjentów, u których ciśnienie skurczowe było bliskie wartości 144 mmHg. Górna granica normy tego ciśnienia wynosi 140 mmHg. Chcemy sprawdzić czy zastosowanie terapii nowym lekiem daje obniżenie ciśnienia o 5 mmHg.

Takie postępowanie testowe wynika ze sposobu prowadzenia terapii w leczeniu nadciśnienia - przy zadanej wartości ciśnienia, ustalona dawka leku powinna spowodować jego obniżenie mniej więcej do górnej granicy normy.

## Przykład

Jednym z testów, którym rozpoczęto analizę nowego leku na nadciśnienie tętnicze było zaaplikowanie go próbie 22 chorych pacjentów, u których ciśnienie skurczowe było bliskie wartości 144 mmHg. Górna granica normy tego ciśnienia wynosi 140 mmHg. Chcemy sprawdzić czy zastosowanie terapii nowym lekiem daje obniżenie ciśnienia o 5 mmHg.

Takie postępowanie testowe wynika ze sposobu prowadzenia terapii w leczeniu nadciśnienia - przy zadanej wartości ciśnienia, ustalona dawka leku powinna spowodować jego obniżenie mniej więcej do górnej granicy normy.

## Przykład

Jednym z testów, którym rozpoczęto analizę nowego leku na nadciśnienie tętnicze było zaaplikowanie go próbie 22 chorych pacjentów, u których ciśnienie skurczowe było bliskie wartości 144 mmHg. Górna granica normy tego ciśnienia wynosi 140 mmHg. Chcemy sprawdzić czy zastosowanie terapii nowym lekiem daje obniżenie ciśnienia o 5 mmHg.

Takie postępowanie testowe wynika ze sposobu prowadzenia terapii w leczeniu nadciśnienia - przy zadanej wartości ciśnienia, ustalona dawka leku powinna spowodować jego obniżenie mniej więcej do górnej granicy normy.

## Przykład cd.

Każdemu pacjentowi zmierzono ciśnienie skurczowe przed rozpoczęciem terapii oraz po jej zakończeniu. W ten sposób dla  $i$ -tego pacjenta  $i = 1, 2, \dots, 22$  dysponowano parą wyników  $(x_i, y_i)$  przed i po terapii.

Naszym celem jest poddanie testowi hipotezy

$$H_0 : \mu_D = 5$$

przy hipotezie alternatywnej

$$H_0 : \mu_D \neq 5.$$

## Przykład cd.

Każdemu pacjentowi zmierzono ciśnienie skurczowe przed rozpoczęciem terapii oraz po jej zakończeniu. W ten sposób dla  $i$ -tego pacjenta  $i = 1, 2, \dots, 22$  dysponowano parą wyników  $(x_i, y_i)$  przed i po terapii.

Naszym celem jest poddanie testowi hipotezy

$$H_0 : \mu_D = 5$$

przy hipotezie alternatywnej

$$H_0 : \mu_D \neq 5.$$

## Przykład cd.

Każdemu pacjentowi zmierzono ciśnienie skurczowe przed rozpoczęciem terapii oraz po jej zakończeniu. W ten sposób dla  $i$ -tego pacjenta  $i = 1, 2, \dots, 22$  dysponowano parą wyników  $(x_i, y_i)$  przed i po terapii.

Naszym celem jest poddanie testowi hipotezy

$$H_0 : \mu_D = 5$$

przy hipotezie alternatywnej

$$H_0 : \mu_D \neq 5.$$

Interesuje nas hipoteza zerowa, która jest modyfikacją hipotezy

$$H_0 : \mu_D = 0.$$

Aby otrzymać test dla naszego przypadku trzeba zmodyfikować statystykę testową

$$T = \frac{\bar{D}}{S_D \sqrt{n}},$$

i rozważać statystykę

$$T' = \frac{\bar{D} - d_0}{S_D / \sqrt{n}}.$$

W naszym przypadku  $d_0 = 5$ .

Dla próby 22 pacjentów otrzymano średnią wartość różnicy  $\bar{d} = 5,3$  oraz  $d_D = 0,4$ . Przy takich wartościach statystyka  $T'$  przyjmuje wartość  $t = 3,518$ . Dla testu z dwustronną alternatywą na poziomie istotności  $\alpha = 0,01$  poziom krytyczny dla rozkładu  $t$ -Studenta z 21 stopniami swobody wynosi 2,831356. Decyzja: hipotezę zerową należy zatem odrzucić. Terapia nowym lekiem nie spełnia nałożonych na nią wymagań.

## Lektura po wykładzie.

J. Koronacki i J. Mielniczuk, STATYSTYKA  
dla studentów kierunków technicznych i przyrodniczych.  
WNT 2001.

przejmie proszę zapoznać się z materiałem zawartym od strony 213  
do strony 229.

## Lektura po wykładzie.

J. Koronacki i J. Mielniczuk, STATYSTYKA  
dla studentów kierunków technicznych i przyrodniczych.  
WNT 2001.

przejmie proszę zapoznać się z materiałem zawartym od strony 213  
do strony 229.

## Lektura po wykładzie.

J. Koronacki i J. Mielniczuk, STATYSTYKA  
dla studentów kierunków technicznych i przyrodniczych.  
WNT 2001.

## U

przejmie proszę zapoznać się z materiałem zawartym od strony 213  
do strony 229.