Zadania z procesów Markowa

Lista 2

1. Znaleźć prosty przykład jednorodnego łańcucha Markowa $\{X_n, n \geq 0\}$ z przestrzenią stanów $J = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, taki że

$$P(X_2 = 6|X_1 \in \{3,4\}, X_0 = 2) \neq P(X_2 = 6|X_1 \in \{3,4\}).$$

2. Niech $\{X_n\}$ będzie JŁM o stanach $0, 1, 2$ z macierzą prawdopodobieństw przejść

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Niech $f(0) = 0, f(1) = f(2) = 1$ oraz $Y_n = f(X_n)$. Czy $\{Y_n, n \geq 0\}$ jest JŁM?

3. Podać przykład łańcucha Markowa $\{X_n\}$ i funkcji borelowskiej f, takich że $\{f(X_n), n \geq 1\}$ nie jest łańcuchem Markowa.

4. Niech $\{X_n, n \geq 1\}$ będzie JŁM ze skończoną przestrzenią stanów, a $\{Z_n\}$ procesem zdefiniowanym przez $Z_n = 1$, jeżeli $X_n = x$ oraz $Z_n = 0$, jeżeli $X_n \neq x$, gdzie x jest ustalonym stanem. Czy $\{Z_n\}$ jest JŁM?

5. Niech $\{X_n\}$ będzie łańcuchem Markowa z macierzą prawdopodobieństw przejść $\mathbb{P}$ równą

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0,1 & 0,5 & 0,4 \\ 0,5 & 0,2 & 0,3 \end{pmatrix}$$

Znaleźć prawdopodobieństwa $P(X_1 = 1|X_0 = 1)$ oraz $P(X_7 = 2|X_4 = 0)$.
Na przykładzie macierzy $\mathbb{P}$ zilustrować metodę szukania $\mathbb{P}^n$ metodą diagonalizacji.

6. Niech macierz prawdopodobieństw przejść dwu-stanowego JŁM będzie równa

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix}.$$

Metodą diagonalizacji pokazać, że

$$\mathbb{P}^n = \begin{pmatrix} 1/2 + (2p-1)^n/2 & 1/2 - (2p-1)^n/2 \\ 1/2 - (2p-1)^n/2 & 1/2 + (2p-1)^n/2 \end{pmatrix}.$$

7. Rozpatrzmy rzuty symetryczną kostką i umówmy się, że $X_n = j$, jeżeli j jest największą liczbą wyrzuconą w pierwszych n rzutach. Czy $\{X_n\}$ jest JŁM? Jeżeli tak, to znaleźć jego macierz prawdopodobieństw przejść $\mathbb{P}$ oraz $\mathbb{P}^n$.

8. Niech $\{X_n\}$ i $\{Y_n\}$ będą wzajemnie niezależnymi łańcuchami Markowa, oba z macierzą prawdopodobieństw przejść $\mathbb{P} = (p_{i,j})$. Udowodnić, że $\{Z_n = (X_n, Y_n), n \geq 1\}$ jest łańcuchem Markowa z macierzą prawdopodobieństw przejść

$$p_{(i,j),(h,k)} = p_{i,h} p_{j,k}.$$

9. Pewien człowiek w każdy weekend przemieszcza się między swoim domem w mieście i na wsi. W każdą sobotę opuszcza swój dom w mieście jadąc na wieś i wraca w niedzielę. Posiada on N parasoli i zabiera jeden z nich jeżeli pada deszcz. Prawdopodobieństwo deszczu w każdy dzień jest równe p. Niech X_n oznacza liczbę parasoli w jego domu w mieście. Czy $\{X_n\}$ jest JŁM?

10*. Niech $\mathbb{P}^{(1)} = (p_{i,j}^{(1)})$ i $\mathbb{P}^{(2)} = (p_{i,j}^{(2)})$ będą macierzami stochastycznymi wymiaru 3×3. Załóżmy, że $P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) = p_{i,j}^{(1)}$ gdy n jest parzyste oraz $p_{i,j}^{(2)}$ gdy n jest nieparzyste. Czy $\{X_n\}$ jest łańcuchem Markowa lub co trzeba zrobić aby był łańcuchem Markowa?

11*. Niech $\{X_n\}$ będzie jednorodnym łańcuchem Markowa z przestrzenią stanów J i macierzą prawdopodobieństw przejść $\mathbb{P} = (p_{i,j})$, a $\{A_k\}$, $J = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, niech będzie partycją J. Zdefiniujmy proces $\{\hat{X}_n, n \geq 0\}$ z przestrzenią stanów $\hat{J} = \{\hat{1}, \hat{2}, \ldots\}$ przez $\hat{X}_n = k$ wtedy i tylko wtedy gdy $X_n \in A_k$. Pokazać, że $\{\hat{X}_n, n \geq 0\}$ jest jednorodnym łańcuchem Markowa, dla dowolnego rozkładu początkowego μ łańcucha Markowa $\{X_n\}$, wtedy i tylko wtedy gdy $\sum_{j \in A_\ell} p_{i,j}$ jest niezależne od $i \in A_k$ dla wszystkich k, l oraz w przypadku tym $\hat{p}_{\hat{k},\hat{\ell}} = \sum_{j \in A_\ell} p_{i,j}$ (dla dowolnego $i \in A_k$) jest prawdopodobieństwem przejścia w macierzy dla łańcucha $\{\hat{X}_n, n \geq 0\}$.

12*. Niech $\{X_n, n \geq 0\}$ będzie jednorodnym łańcuchem Markowa z przestrzenią stanów J i macierzą prawdopodobieństw przejść $\mathbb{P}$, a $\{Y_n, n \geq 0\}$ procesem wektorowym zdefiniowanym przez $Y_n = (X_n, X_{n+1}, \ldots, X_{n+L})$, gdzie L jest ustaloną liczbą całkowitą nieujemną. Proces $\{Y_n\}$ przyjmuje wartości w przestrzeni stanów

$$F = \{(i_0, i_1, \ldots, i_L) \in J^{L+1} : \quad p_{i_0,i_1} p_{i_1,i_2} \cdots p_{i,i_L} > 0\}.$$

Pokazać, że $\{Y_n,\ n \geq 0\}$ jest jednorodnym łańcuchem Markowa i znaleźć jego macierz prawdopodobieństw przejść w przypadku $L = 2$.