

Zadania na ćwiczenia z szeregów czasowych,
lista 2

1. Niech $X_t = a + bt + Y_t$, gdzie $\{Y_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ jest ciągiem wzajemnie niezależnych zmiennych losowych ze średnią zero i wariancją σ^2 , natomiast a oraz b są stałymi. Zdefiniujmy proces

$$W_t = (2q + 1)^{-1} \sum_{j=-q}^q X_{t+j}.$$

Obliczyć średnią i funkcję autokorelacji dla $\{W_t\}$.

Zauważyć, że chociaż $\{W_t\}$ nie jest stacjonarny, to jego funkcja autokorelacji $\gamma(t+h, t) = \text{cov}(W_{t+h}, W_t)$ nie zależy od t . Narysować funkcję autokorelacji.

2. Niech $\{X_t\}$ będzie procesem średniej ruchomej rzędu 2, symbolicznie $\{X_t\} \sim MA(2)$, postaci

$$X_t = Z_t + \theta Z_{t-2},$$

gdzie $\{Z_t\} \sim WN(0, 1)$.

(a) Znaleźć funkcję autokowariancji i autokorelacji dla tego procesu, gdy $\theta = 0,8$;

(b) Obliczyć wariancję średniej $(X_1 + X_2 + X_3 + X_4)/4$, dla $\theta = 0,8$;

(c) Powtórzyć (b) dla $\theta = -0,8$ i porównać z wynikiem w (b).

3. Niech $\{X_t\}$ będzie procesem autoregresji rzędu 1, symbolicznie $\{X_t\} \sim AR(1)$, postaci

$$X_t = \phi X_{t-1} + Z_t,$$

gdzie $\{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$.

(a) Obliczyć wariancję średniej $(X_1 + X_2 + X_3 + X_4)/4$, dla $\phi = 0,9$ i $\sigma^2 = 1$;

(b) Powtórzyć (a), gdy $\phi = -0,9$ i porównać wynik z rezultatem w (a).

4. Znaleźć wartości λ_1, λ_2 dla których proces $\{X_t\}$ spełniający równanie

$$X_t = \lambda_1 X_{t-1} + \lambda_2 X_{t-2} + Z_t$$

jest stacjonarny.

5. Stacjonarny proces $\{X_t\}$ ma funkcję autokowariancji $\gamma_X(k)$. Niech $Y_t = X_t - X_{t-1}$. Znaleźć funkcję autokowariancji procesu $\{Y_t\}$ w terminach funkcji $\gamma_X(k)$ i znaleźć $\gamma_Y(k)$, jeżeli $\gamma_X(k) = \lambda^{|k|}$.

6. Znaleźć stacjonarne rozwiązanie równania autoregresji $X_t = 0.3X_{t-1} + Z_t$.

7. Załóżmy, że stacjonarny proces $\{X_t\}$ jest rozwiązaniem równania

$$a_0 X_t + a_1 X_{t-1} + \dots = Z_t \quad \text{oraz} \quad X_t = b_0 Z_t + b_1 Z_{t-1} + \dots$$

gdzie $a_0 = b_0 = 1$. Niech $A(s) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j s^j$, $B(s) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j s^j$. Pokazać, że $A(s)B(s) = 1$.

Definiując $\gamma(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_X(k) s^k$ pokazać, że

$$\gamma(s) = \sigma_Z^2 B(s)B(1/s) = \sigma_Z^2 / (A(s)A(1/s)).$$

8. Znaleźć funkcję autokowariancji $\{\gamma(k)\}$ dla procesu AR(3) postaci

$$(1 - 0,5B)(1 - 0,4B)(1 - 0,1B)X_t = Z_t, \quad \{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2).$$

9. Niech $\{X_t\}$ będzie procesem ARMA(1,1) postaci

$$X_t - \phi X_{t-1} = Z_t + \theta Z_{t-1}, \quad \{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2),$$

gdzie $|\phi| < 1, |\theta| < 1$. Wyznaczyć współczynniki $\{\psi_j\}$ w postaci $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j Z_{t-j}$ i pokazać, że funkcja autokorelacji dla procesu $\{X_t\}$ jest dana przez

$$\rho(1) = (1 + \phi\theta)(\phi + \theta)/(1 + \theta^2 + 2\phi\theta),$$

$$\rho(k) = \phi^{k-1} \rho(1), \quad k \geq 1.$$