

Zadania na ćwiczenia z szeregów czasowych,
lista 3

1. Znaleźć funkcje autokowariancji dla szeregów czasowych:
 - (a) $X_t = Z_t + 0,3Z_{t-1} - 0,4Z_{t-2}$, gdzie $\{Z_t\} \sim WN(0, 1)$ oraz
 - (b) $Y_t = \tilde{Z}_t - 1,2\tilde{Z}_{t-1} - 1,6\tilde{Z}_{t-2}$, gdzie $\{\tilde{Z}_t\} \sim WN(0, 0,25)$.
 Porównać funkcje autokowariancji procesów z (a) i (b).

2. Znaleźć współczynniki ψ_j , $j = 0, 1, 2, \dots$ w reprezentacji

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j Z_{t-j}$$

procesu $ARMA(2, 1)$ spełniającego równanie

$$(1 - 0,5B + 0,04B^2)X_t = (1 + 0,25B)Z_t.$$

3. Wyznaczyć, który z następujących procesów jest wynikowy, a który odwracalny

- (a) $X_t + 0,2X_{t-1} - 0,48X_{t-2} = Z_t$,
- (b) $X_t + 1,9X_{t-1} + 0,88X_{t-2} = Z_t + 0,2Z_{t-1} + 0,7Z_{t-2}$,
- (c) $X_t + 0,6X_{t-2} = Z_t + 1,2Z_{t-1}$,
- (d) $X_t + 1,8X_{t-1} + 0,81X_{t-2} = Z_t$,
- (e) $X_t + 1,6X_{t-1} = Z_t - 0,4Z_{t-1} + 0,04Z_{t-2}$.

4. Dla tych procesów w powyższym zadaniu 3, które są wynikowe znaleźć 6 pierwszych współczynników $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_5$ w rozwinięciu

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j Z_{t-j}.$$

5. Znaleźć współczynniki ψ_j , $j = 0, 1, 2, \dots$ w reprezentacji $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j Z_{t-j}$ procesu $ARMA(2, 1)$ spełniającego równanie

$$(1 - 0,5B + 0,04B^2)X_t = (1 + 0,25B)Z_t.$$

6. Znaleźć średnią i autokowariancję procesu $ARMA(2, 1)$ spełniającego równanie

$$X_t + 2 + 1,3X_{t-1} - 0,4X_{t-2} = Z_t + Z_{t-1}.$$

7. Znaleźć funkcję autokowariancji dla procesu $\{X_t\}$ spełniającego równanie:

$$(a) \quad (1 - 3/2B + 1/2B^2)X_t = (1 + 1/2B)Z_t, \quad \text{pierwiastki } 2 \text{ i } 3$$

$$(b) \quad (1 + 1/4B - 1/8B^2)X_t = (1 - 1/3B)Z_t, \quad \text{pierwiastki } -2 \text{ i } 4$$

$$(c) \quad X_t = -1/4X_{t-1} + 4/16X_{t-2} - 1/16X_{t-3} + Z_t - 1/3Z_{t-1}, \quad \text{pierwiastki } 4, -2 \text{ i } 2$$

gdzie $\{Z_t\} \sim WN(0, 4)$.

8. Znaleźć stacjonarne rozwiązania dla procesów $\{X_t\}$ w punktach (a)-(b) zadania 7.

9. Pokazać, że funkcja autokorelacji dla procesu $\{X_t\} \sim AR(2)$ z $\phi_1 = 1/3$ i $\phi_2 = 2/9$, jest postaci

$$\rho_k = \frac{16}{21} \left(\frac{2}{3}\right)^{|k|} + \frac{5}{21} \left(\frac{-1}{3}\right)^{|k|}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

10. Znaleźć współczynniki ψ_j , $j = 0, 1, 2, \dots$ w reprezentacji

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j Z_{t-j},$$

gdzie $\{X_t\}$ jest procesem $ARMA(2, 1)$ postaci

$$(1 - 0,5B + 0,4B^2)X_t = (1 + 2,5B)Z_t, \quad \{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2).$$