

Zadania z procesów Markowa
Lista 6

1. Niech $\{X_n\}$ będzie jednorodnym łańcuchem Markowa z przestrzenią stanów $J = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i macierzą prawdopodobieństw przejść

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0,4 & 0,2 & 0,2 & 0,1 & 0,1 \\ 0,5 & 0 & 0,1 & 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}$$

Obliczyć prawdopodobieństwo absorpcji w klasie $\{2, 3\}$ gdy łańcuch startuje ze stanu 5. Znaleźć średni czas do absorpcji dla JŁM z tą macierzą prawdopodobieństw przejść.

2. Niech $\{X_n\}$ będzie jednorodnym łańcuchem Markowa z przestrzenią stanów $J = \{1, 2, 3, 4\}$ i macierzą prawdopodobieństw przejść

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0,3 & 0,5 \\ 0,5 & 0 & 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & 0,5 & 0 & 0,2 \end{pmatrix}$$

Obliczyć prawdopodobieństwo, że łańcuch startując ze stanu 1 osiągnie najpierw stan 3 przed stanem 4 (a) metodą analizy pierwszego kroku oraz (b) metodą macierzy potencjalnej.

3. Szczur i kot poruszają się między dwoma pokojami wykorzystując różne ścieżki. Ich ruchy są niezależne, rządzone przez ich odpowiednie macierze prawdopodobieństwa przejść

$$\begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix} \quad \text{oraz} \quad \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

Kot startuje z pokoju nr. 1 a szczur z pokoju nr. 2. Jeżeli się spotkają w tym samym pokoju, to kot zjada szczura. Jak długo będzie żył szczur?

4. Na rogu ulic Czerwonego Byka i Białej Pantery spotyka się trzech rewolwerowców: A, B oraz C i jednocześnie zaczynają strzelać jeden do drugiego. Każdy strzela w odstępach 10 sekund tak długo dopóki jest żywy. Prawdopodobieństwo trafienia przez A, B i C jest równie odpowiednio α, β i γ . A jest najbardziej nienawidzony, więc dopóki jest żywy B i C strzelają do A, ignorując się wzajemnie. Z pewnych powodów A strzela do B dopóki B jest żywy. C jest celem ataku w przypadku, gdy A lub B jest zabity. Oblicz prawdopodobieństwo przeżycia rewolwerowców A, B i C.
5. Rozważmy jednorodny łańcuch Markowa z niepustym zbiorem stanów rekurencyjnych oraz co najmniej dwoma stanami chwilowymi i, j . Podać ogólną metodę obliczania prawdopodobieństwa, że łańcuch nigdy nie odwiedzi stanu j oraz że będzie absorbowany przez rekurencyjną klasę R_k , gdy startuje ze stanu i .
7. Masz jednego dolara i jesteś winien mafii 5 dolarów. Decydujesz się podjąć serię zakładów w grze z symetryczną monetą. Masz do wyboru dwie strategie: stawiać zawsze jednego dolara do momentu wygrania 5 dolarów lub stawiać tyle ile posiadasz ale nie więcej niż jest to potrzebne do zdobycia 5 dolarów. Znaleźć prawdopodobieństwo pozostania przy życiu przy każdej strategii.

8. Niech $\{X_n\}$ będzie jednorodnym Ł.M. z przestrzenią stanów $J = \{0, 1, 2, \dots, m\}$ i macierzą prawdopodobieństw przejść $\mathbb{P} = (p_{i,j})$, gdzie

$$p_{i,j} = \binom{m}{j} \left(\frac{i}{m}\right)^j \left(1 - \frac{i}{m}\right)^{m-j}.$$

Zauważyć, że stany 0 i m są pochłaniającymi. Znaleźć prawdopodobieństwo absorpcji przez stan 0.

9. Niech $\{X_n, n \geq 0\}$ będzie błędzeniem losowym na zbiorze $N = \{0, 1, 2, \dots\}$ z ekranem odbijającym w zerze (prawdopodobieństwa przejść dane są przez $p_{0,1} = 1$, $p_{i,i+1} = p$, $p_{i,i-1} = q$, $p > q$.) Pokazać, że dla $A = N - \{0\}$

$$v(i) = P(X_n \in A, n \geq 1 | X_0 = i) = 1 - \left(\frac{q}{p}\right)^i.$$

10. Dla macierzy prawdopodobieństw przejść

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,3 & 0,3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0,4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,8 & 0,2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,4 & 0,6 & 0 \\ 0,4 & 0,4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,2 \\ 0,1 & 0 & 0,3 & 0 & 0 & 0,6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

znaleźć macierz kanoniczną (klasy rekurencyjne i zbiór tranzytywny), a następnie znaleźć macierze Q , S i G .

11. Dana jest macierz prawdopodobieństw przejść

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & & & & & & \\ 0,8 & 0,2 & & & & & & \\ & & 0 & 0,4 & 0,6 & & & \\ & & 1 & 0 & 0 & & & \\ & & 1 & 0 & 0 & & & \\ 0,1 & 0 & 0,2 & 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,1 & \\ 0,1 & 0,1 & 0,1 & 0 & 0,1 & 0,2 & 0,4 & \end{pmatrix}$$

na zbiorze stanów $J = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Znaleźć postać kanoniczną macierzy $\mathbb{P}$ (klasy rekurencyjne, zbiór stanów tranzytywnych), następnie macierze Q , S oraz G . Znaleźć prawdopodobieństwo absorpcji ze stanu 6 do klasy $\{3, 4, 5\}$.

12. Niech $x_1, x_2, \dots, x_n$ będą rozwiązaniem następującego układu równań liniowych

$$x_i = \sum_k p_{i,k} x_k, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

gdzie $\mathbb{P} = (p_{i,j})$ jest macierzą stochastyczną JŁM o n stanach. Udowodnić, że

- (a) stany r dla których $x_r > 0$ tworzą zamknięty zbiór stanów (niekoniecznie nieredukowalny),
 (b) jeżeli stany j oraz k należą do tego samego nieprzywiedlnego zbioru, to $x_j = x_k$.